Quantenmechanik I, WS 2026/27

Prof. Dr. Michael Bonitz

Übungszettel 4 (Abgabe: Montag 9.11. 10:00)

1. **Wiederholung (mündlich)**: *Schrödingergleichung, 1d-Kastenpotential*

   (a) Definieren Sie die Breite der Wahrscheinlichkeitsdichte eines Mikroteilchens. Erläutern Sie den Zusammenhang zwischen der Breite im Ortsraum und im Impulsraum.

   (b) Diskutieren Sie die Lösung der Schrödingergleichung für den Potentialtopf mit unendlich hohen Wänden.

   (c) Diskutieren Sie die Lösung der Schrödingergleichung und die Stetigkeitsanforderungen an die Wellenfunktion für ein Teilchen in einem stückweise stetigen Potential (z.B. Potential bestehend aus n Kästen endlicher Höhe/Tiefe).

2. **Aufgaben (20 Punkte)**: *Zeitabhängige Schrödingergleichung*

   (a) Ein Studierender hat eine KI gefragt, wie sich Orts- und Impulsunschärfe des Gaußschen Wellenpakets, im Skript Glg. (2.30), zeitlich verhalten. Er erhielt die folgende Antwort:

   "Sehr gute Frage. Für das Gaußsche Wellenpaket (2.30) lassen sich die Unschärfen direkt aus den Wahrscheinlichkeitsdichten ablesen. Im k-Raum gilt $\tilde{\rho}(k) \sim e^{-\sigma^2(k-k_0)^2/2}$, also $\Delta k = 1/\sigma$ und $\Delta p = \hbar/\sigma$. Im Ortsraum folgt aus (2.33) $\Delta x(t) = \sqrt{\sigma^2/4 + \hbar^2 t^2/(m^2\sigma^2)}$ so dass das Produkt bei $t = 0$ genau $\Delta x \Delta p = \hbar/2$ beträgt. Das Gauß-Paket ist also ein Zustand minimaler Unschärfe. Da das Paket im Ortsraum zerfließt, verbreitert sich auch seine Impulsverteilung: Durch die Dispersion wächst die Impulsunschärfe gemäß

   $$\Delta p(t) = \frac{\hbar}{\sigma}\left(1 + \frac{\hbar t}{m\sigma^2}\right) \tag{1}$$

   an. Für große Zeiten wächst Δx linear in t, $\Delta x \approx \hbar t/(m\sigma)$. Das entspricht genau einer klassischen Teilchenwolke, deren Geschwindigkeiten um $\Delta v = \Delta p/m$ streu- en. Bemerkenswert ist, dass ein anfangs schmaleres Paket langsamer zerfließt, weil weniger Wellenanteile auseinanderlaufen können. Außerdem hängt die Zerfließgeschwindigkeit vom mittleren Impuls ab: Bei großem k_0 ist die Dispersionsrelation $\omega(k) = \hbar k^2/2m$ stärker gekrümmt, so dass schnelle Pakete schneller zerfließen. Insgesamt ist das Unschärfeprodukt also nur bei $t = 0$ minimal und wächst danach monoton an."

Prüfen Sie jede Aussage der Antwort. Begründen Sie bei falschen Aussagen, *warum* sie falsch sind – möglichst mit einem physikalischen Argument, das ohne vollständiges Nachrechnen auskommt –, und korrigieren Sie sie. Als richtig erkannte Aussagen müssen nicht begründet werden; wer eine richtige Aussage als falsch markiert, muss dies jedoch nachvollziehbar begründen.

(Punkte: 12)

(b) Zeigen Sie, dass die Schrödingergleichung für ein freies Teilchen die Energie erhält. Dazu betrachte man die lokale Energiedichte, $\epsilon(\mathbf{r},t) = \psi^*(\mathbf{r},t)\hat{H}\psi(\mathbf{r},t)$, leite für sie eine Bilanzgleichung der Form

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_\epsilon = 0\,, \tag{2}$$

ab und find einen Ausdruck für die Energiestromdichte $\mathbf{j}_\epsilon$. Für die Energieerhaltung untersuche man die Gesamtenergie, d.h. das Integral von ϵ über den ganzen Raum. (8 Punkte).