Fourier-Transformation und Synthese der eindimensionalen Gaußfunktion

30. Oktober 2026

Inhaltsverzeichnis

1 Definition und Fourier-Konvention **2**

2 Analytische Fourier-Transformation **2**

2.1 Spezialfall $\sigma = 1$ 2

2.2 Spezialfall $\sigma = 2$ 2

2.3 Hinweis zur symmetrischen Normierung 3

3 Darstellung durch Fourier-Komponenten **3**

3.1 Diskrete Näherung und drei Komponenten fuer $\sigma = 1$ 3

4 Drei Komponenten fuer $\sigma = 1$ und $\sigma = 2$ **5**

5 Zusammenfassung **6**

1 Definition und Fourier-Konvention

Wir betrachten die zentrierte Gaußfunktion mit Breite $\sigma > 0$ und Amplitude eins:

$$\psi_\sigma(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right). \tag{1}$$

Verwendet wird die Fourier-Transformation mit Wellenzahl k:

$$\widetilde{\psi}_\sigma(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_\sigma(x) e^{-ikx}\, dx, \tag{2}$$

$$\psi_\sigma(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\psi}_\sigma(k) e^{ikx}\, dk. \tag{3}$$

2 Analytische Fourier-Transformation

Mit dem Gaußschen Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+bx}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{b^2}{4a}\right), \qquad \mathrm{Re}(a) > 0, \tag{4}$$

setzen wir $a = 1/(2\sigma^2)$ und $b = -ik$. Daraus folgt

$$\boxed{\widetilde{\psi}_\sigma(k) = \sqrt{2\pi}\,\sigma \exp\left(-\frac{\sigma^2 k^2}{2}\right)}. \tag{5}$$

Die Fourier-Transformierte ist also ebenfalls eine Gaußfunktion. Ihre charakteristische Breite im k-Raum skaliert wie $1/\sigma$: Je breiter die Funktion im Ortsraum ist, desto schmaler ist ihr Spektrum. Bei der hier verwendeten Konvention ist zugleich der Scheitelwert $\widetilde{\psi}_\sigma(0) = \sqrt{2\pi}\,\sigma$.

2.1 Spezialfall $\sigma = 1$

$$\psi_1(x) = e^{-x^2/2}, \qquad \widetilde{\psi}_1(k) = \sqrt{2\pi}\, e^{-k^2/2}. \tag{6}$$

2.2 Spezialfall $\sigma = 2$

$$\psi_2(x) = e^{-x^2/8}, \qquad \widetilde{\psi}_2(k) = 2\sqrt{2\pi}\, e^{-2k^2}. \tag{7}$$

Damit ist die Ortsraumfunktion bei $\sigma = 2$ breiter als bei $\sigma = 1$, während sich das Fourier-Spektrum in k-Richtung verengt.

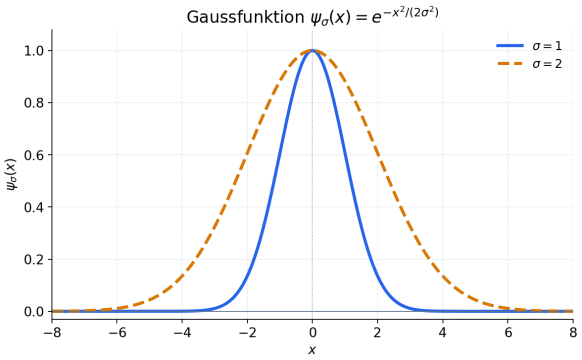


Abbildung 1: Ortsraumvergleich fuer $\sigma = 1$ und $\sigma = 2$.

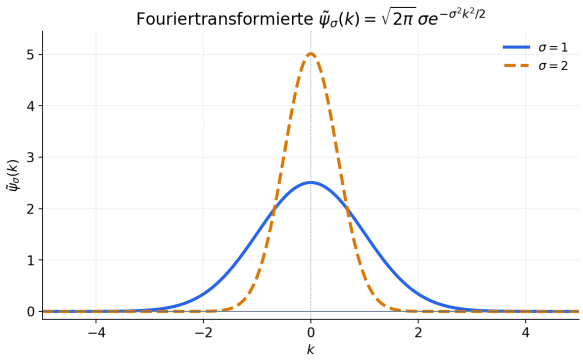


Abbildung 2: Fourierraumvergleich fuer $\sigma = 1$ und $\sigma = 2$.

2.3 Hinweis zur symmetrischen Normierung

Bei der symmetrisch normierten Transformation mit dem Vorfaktor $1/\sqrt{2\pi}$ in Vorwaerts- und Ruecktransformation lautet das Ergebnis fuer die Vorwaertstransformation stattdessen

$$\widehat{\psi}_\sigma(k) = \sigma e^{-\sigma^2 k^2/2}. \tag{8}$$

3 Darstellung durch Fourier-Komponenten

Da $\widetilde{\psi}_\sigma(k)$ gerade und reell ist, lässt sich die inverse Transformation als Kosinusintegral schreiben:

$$\psi_\sigma(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\sigma \int_0^\infty e^{-\sigma^2 k^2/2}\cos(kx)\,dk. \tag{9}$$

Die positiven und negativen Fourier-Frequenzen $\pm k$ bilden zusammen jeweils einen reellen Kosinusanteil.

3.1 Diskrete Näherung und drei Komponenten fuer $\sigma = 1$

Wir nähern das Integral mit einer Mittelpunktsumme an. Bei Schrittweite Δk definieren wir

$$k_j = \left(j + \frac{1}{2}\right)\Delta k, \qquad c_j = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\sigma\,\Delta k\, e^{-\sigma^2 k_j^2/2}, \tag{10}$$

und erhalten aus N Kosinuskomponenten

$$\psi_{\sigma,N}(x) \approx \sum_{j=0}^{N-1} c_j \cos(k_j x). \tag{11}$$

Fuer $\sigma = 1$ wurde $\Delta k = 0.5$ verwendet. Die drei Frequenzen sind dann

$$k_0 = 0.25, \qquad k_1 = 0.75, \qquad k_2 = 1.25. \tag{12}$$

Die drei gewichteten Kosinusanteile werden addiert; mit mehr Komponenten wird die Summe immer genauer. Die Folge der Plots vergleicht $N = 3, 5, 9, 17$ auf dem Ortsbereich $x \in [-6, 6]$.

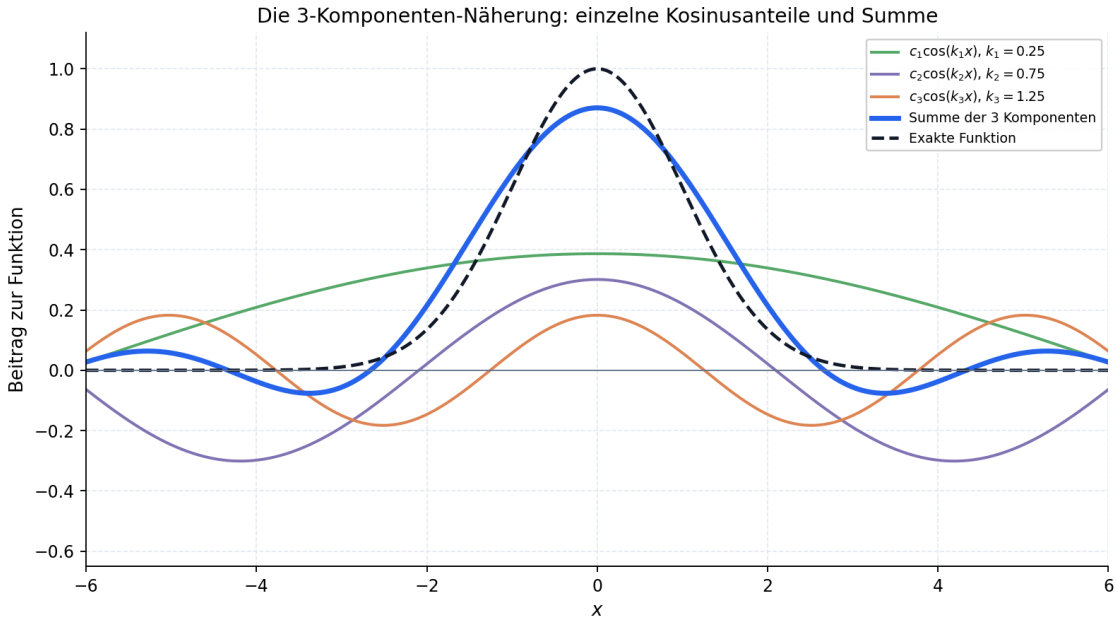


Abbildung 3: Aufbau des Wellenpaketes (gestrichelt) aus drei monochromatischen Wellen mit den optimalen Gewichten. Die drei einzelnen Kosinusanteile, ihre Summe und die exakte Gaußfunktion fuer $\sigma = 1$.

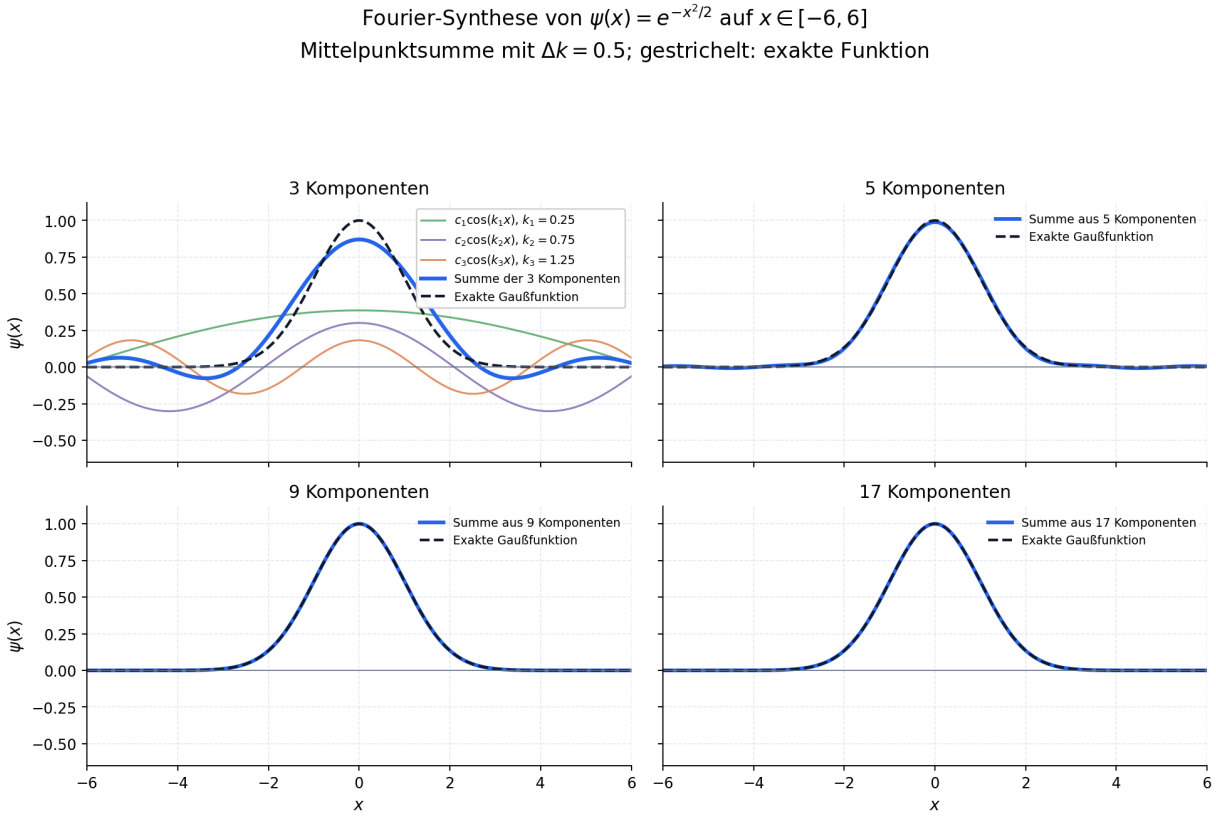


Abbildung 4: Annäherung der Gaußfunktion durch 3, 5, 9 und 17 Fourier-Komponenten.

4 Drei Komponenten fuer $\sigma = 1$ und $\sigma = 2$

Um den schrumpfenden k-Bereich bei wachsendem σ direkt zu zeigen, verwenden wir in den beiden Fällen dieselbe Schrittweite in der dimensionslosen Wellenzahl $q = \sigma k$. Konkret setzen wir

$$\Delta k_\sigma = \frac{0.5}{\sigma}, \qquad k_j = \left(j + \frac{1}{2}\right) \Delta k_\sigma, \qquad j = 0, 1, 2. \tag{13}$$

Die Koeffizienten der drei Kosinusanteile lauten damit

$$c_{j,\sigma} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \sigma\, \Delta k_\sigma e^{-\sigma^2 k_j^2/2}. \tag{14}$$

Die Frequenzen für die beiden Fälle sind:

σ	Δk_σ	drei positive Stuetzfrequenzen k_j
1	0.5	0.25, 0.75, 1.25
2	0.25	0.125, 0.375, 0.625

Bei $\sigma = 2$ sind alle drei positiven Stützfrequenzen genau halb so gross. Das veranschaulicht die allgemeine Skalierung der spektralen Breite mit $1/\sigma$. Die Spektralkurve wird zugleich am Ursprung höher, denn $\widetilde{\psi}_\sigma(0) = \sqrt{2\pi}\,\sigma$.

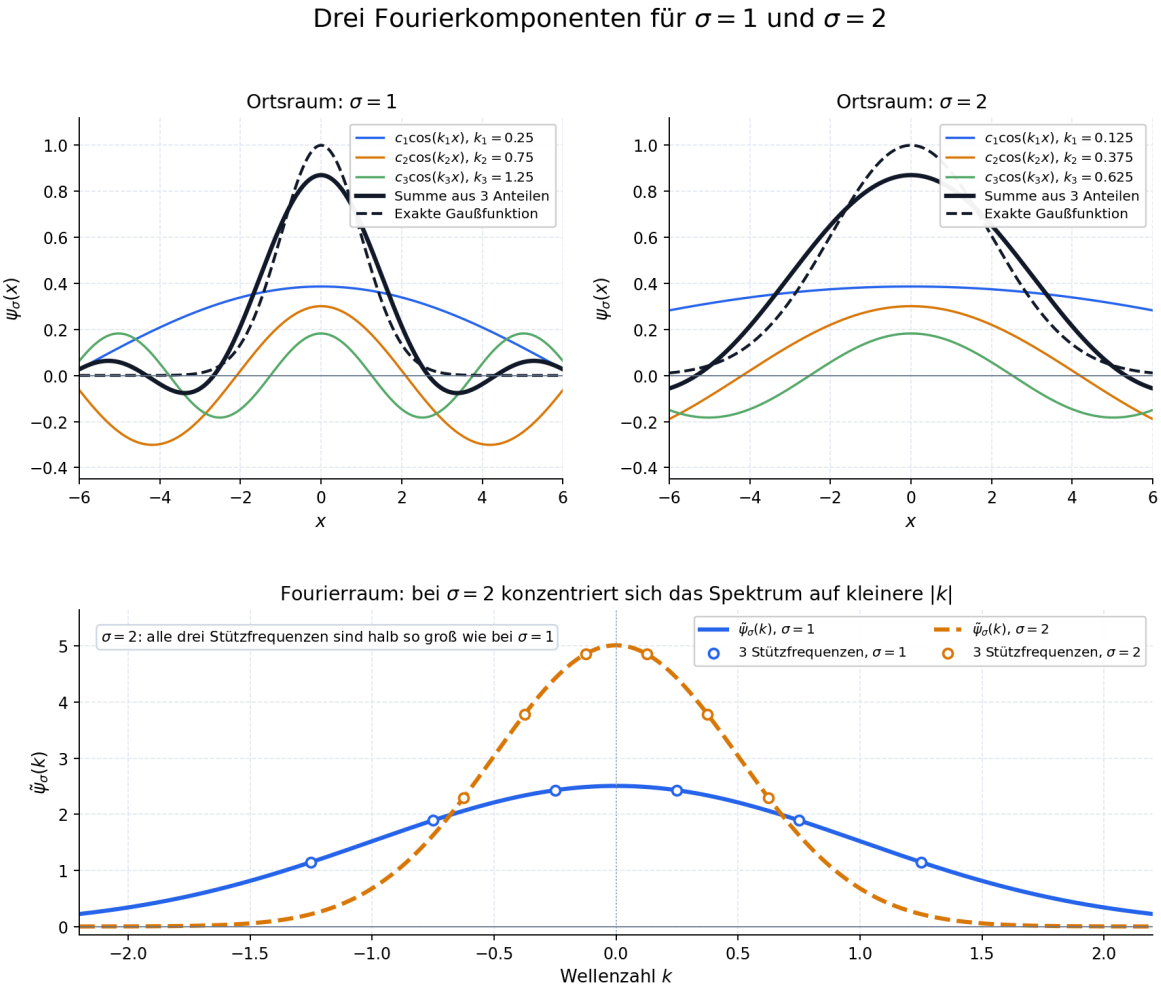


Abbildung 5: Drei-Komponenten-Synthese im Ortsraum und Vergleich der Fourier-Spektren fuer $\sigma = 1$ und $\sigma = 2$.

5 Zusammenfassung

Die Gaußfunktion ist unter der Fourier-Transformation wieder eine Gaußfunktion. Fuer $\psi_\sigma(x) = e^{-x^2/(2\sigma^2)}$ gilt $\widetilde{\psi}_\sigma(k) = \sqrt{2\pi}\,\sigma e^{-\sigma^2 k^2/2}$. Damit sind Ortsraum- und Frequenzraum-Breite reziprok. Die inverse Transformation stellt ψ_σ als gewichtete Überlagerung von Kosinuskomponenten dar; eine endliche Summe liefert eine Näherung, die mit zunehmender Zahl der Komponenten schnell besser wird.