

Statistische Physik und Thermodynamik, SS 2026

Prof. Dr. Michael Bonitz

Übungszettel 8, Abgabe: Montag, 15. Juni 10:15

1. Wiederholung: *Thermodynamische Stabilitätsbedingungen*¹

- Diskutieren Sie die thermodynamischen Stabilitätsbedingungen für räumlich homogene Systeme.
- Erläutern Sie die Stabilitätsbedingungen in räumlich inhomogenen Systemen.
- Erläutern Sie die Stabilitätsbedingung in chemisch reagierenden Systemen. Diskutieren Sie das Massenwirkungsgesetz.
- Diskutieren Sie das Gleichgewicht in Mehrphasensystemen. Erarbeiten Sie sich die Gibbssche Phasenregel ab und diskutieren Sie diese an Beispielen.

2. Aufgaben: *Systeme in externen Feldern. Chemisches Gleichgewicht* [39 Punkte]

- Unter der Annahme, dass sich die Umgebungsluft wie ein ideales Gas verhält berechne man die Höhenabhängigkeit ihrer Dichte. Diskutieren Sie auch die Höhenabhängigkeit der Temperatur der Luft. Hinweis: man verwende die Gleichgewichtsbedingung für das chemische Potential in einem externen Potential.
(9 Punkte)
- Eine Mischung aus N_1 Ionen der Ladung Z_1 und N_2 Ionen der Ladung Z_2 befinde sich in einem elektrostatischen Potential mit $\phi(\mathbf{r}) = \phi_0 \frac{r^2}{R_0^2}$, R_0 ist eine Konstante. Berechnen Sie die Dichteverteilung der Ionen. Die Ionen sind als ideales Gas zu betrachten. Diskutieren Sie, wann das gerechtfertigt ist. Berechnen Sie die Kraft auf eine Probeladung Z_p , die am Ort \mathbf{r} platziert wird.
(12 Punkte)
- Man untersuche das Ionisations-Dissoziations-Gleichgewicht von Wasserstoff als Funktion von Temperatur und Dichte (Druck). Für die chemischen Potentiale verwende man

$$\mu_a = k_B T \ln n_a \Lambda_a^3, \quad a = e, p, \quad \Lambda_a^2 = h / (2\pi m_a k_B T)^{1/2} \quad (1)$$

$$\mu_b = k_B T \ln n_b \Lambda_b^3 - k_B T \ln Z_b^{\text{int}}, \quad b = H, H_2, \quad (2)$$

$$Z_b^{\text{int}} = \sum_i g_i e^{-E_i/k_B T} \approx e^{-E_{b0}/k_B T}. \quad (3)$$

Hier ist Λ_a die thermische DeBroglie-Wellenlänge der einzelnen Spezies, und Z_b^{int} bezeichnet die Zustandssumme der Bindungszustände der Atome bzw.

¹Theoriefragen sind mündlich zu beantworten, die wichtigsten Schritte überzeugend zu erläutern.

Moleküle (i numeriert alle Energie-Eigenwerte und g_i deren Entartungsfaktor), die durch den Beitrag des Grundzustandes ($E_{b0} < 0$) angenähert werden soll.

- i. Formulieren Sie die Bedingungen für das Ionisations-Dissoziations-Gleichgewicht durch die chemischen Potentiale.
- ii. Finden Sie daraus ein Gleichungssystem für die Dichten der Sorten $n_a = N_a/V$ und die Konzentrationen $c_a = N_a/N$. Für die Gesamtteilchenzahl verwende man die Gesamtzahl aller Elektronen (fixiert), die entweder frei oder in Atomen bzw. Molekülen gebunden sind, $N \equiv N_e + N_H + 2N_{H_2}$. Die Gesamt-Elektronendichte ist entsprechend $n = N/V$.
- iii. Man stelle qualitativ dar: die Isothermen $c_e(n), c_H(n), c_{H_2}(n)$, sowie – für eine fixierte Dichte n – die Temperaturabhängigkeit der Konzentrationen und untersuche den Ionisations- und Dissoziationsgrad (Anteil freier Elektronen bzw. Anteil atomaren Wasserstoffs).
- iv. Das vorliegende Modell eines partiell ionisierten Wasserstoff-Plasmas vernachlässigt wesentliche Wechselwirkungseffekte und ist daher nur bei geringen Dichten n gültig. Eine wesentliche Verbesserung kann erzielt werden durch Berücksichtigung der Coulombwechselwirkung in der inneren Energie der geladenen Teilchen: $U_e + U_p = 3k_B T(N_e + N_p)/2 + U_{\text{int}}$. Im Rahmen der Debye-Approximation verwende man $U_{\text{int}} \approx -\kappa e^2 N$, mit $\kappa^2 = 4\pi(n_e + n_p)e^2/k_B T$. Die Wechselwirkung führt zu einer Korrektur der chemischen Potentiale von Elektronen und Protonen. Finden Sie diese und geben Sie das modifizierte Massenwirkungsgesetz an.
- v. Berechnen Sie die Isothermen der Konzentrationen der einzelnen Sorten unter Berücksichtigung der Coulomb-Wechselwirkung. Diskutieren Sie die Grenzen dieses Modells. Was ist im Limes großer Dichten zu erwarten? (18 Punkte)