

Statistische Physik und Thermodynamik, SS 2026

Prof. Dr. Michael Bonitz

Übungszettel 5, Abgabe 18. Mai 10:15

1. Wiederholung: *Mikrokanonische und kanonische Gesamtheit*¹

- (a) Erläutern Sie die Definition des mikrokanonischen Ensembles und die mikrokanonische Gibbsverteilung. Diskutieren Sie das Grundpostulat der Statistischen Physik.
- (b) Geben Sie den mikrokanonischen Dichteoperator an und diskutieren Sie die quantenmechanische Zustandssumme.
- (c) Erläutern Sie das Gibbssche Paradoxon und seine Lösung.
- (d) Erläutern Sie den Zusammenhang zwischen mikrokanonischer Entropie und den thermodynamischen Funktionen Temperatur, Druck und chemisches Potential.

2. Aufgaben: *Mikrokanonische und kanonische Gesamtheit* (38 Punkte)

- (a) Für ein energetisch isoliertes Teilchen im 1-dimensionalen Oszillatorpotential (Frequenz ω , mikrokanonisches Ensemble) berechne man das klassische Zustandsintegral $Z_\mu(E; \omega) = \int d\Omega \delta[H(p, x; \omega) - E]$. Untersuchen Sie auch die Ableitungen von Z_μ nach E und ω und diskutieren Sie das Ergebnis und Grenzfälle. (10 Punkte)
- (b) Bei der Ableitung der Entropie des idealen Gases (s. Vorlesung) wurde vorausgesetzt, dass die Wechselwirkung und quantenmechanische Entartung vernachlässigbar sind. Zeichnen Sie den zulässigen Parameterbereich für ein Elektronengas in der Ebene $\log n - \log T$ ein (T in K und n in Teilchen pro cm^3). Als Grenze verwende man die Bedingungen $\Gamma = 0.1$ und $\chi = 0.1$. Betrachten Sie darüber hinaus ein dichtes Elektron-Ion-Plasma (Ionen der Masse m_i). Untersuchen Sie, in welchem Bereich der $\log n - \log T$ -Ebene die Elektronen sowie die Ionen entartet sind (als Kriterium verwende man $\chi = 1$). (5 Punkte)
- (c) Verallgemeinern Sie das (mikrokanonische) Resultat für die Entropie, Energie, Druck und chemisches Potential des idealen Gases auf ein Mehrsortensystem. Betrachten Sie als Beispiel ein vollständig ionisiertes Wasserstoffplasma, d.h. System aus N Elektronen und N Protonen. Man untersuche auch das Verhältnis der Beiträge von Elektronen und Protonen für diese Größen. (5 Punkte)

¹Theoriefragen sind mündlich zu beantworten, die wichtigsten Schritte überzeugend zu erläutern.

- (d) Betrachten Sie ein Wasserstoffgas für Temperaturen $50,000 < T < 150,000\text{K}$. Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme der Bindungszustände und die Wahrscheinlichkeit der einzelnen Zustände. Diskutieren Sie das Ergebnis. (5 Punkte)
- (e) Verallgemeinern Sie die Berechnung der Entropie für ein Wasserstoffgas auf den atomaren Bereich. Nehmen Sie dafür an, dass alle Elektronen gebunden und im Grundzustand sind. Man löse dazu für jedes Elektron-Proton-Paar das Wasserstoffproblem in Relativ- und Schwerpunktskoordinaten. Skizzieren Sie qualitativ in der Dichte-Temperatur-Ebene aus Aufgabe (b) den Bereich des atomaren Wasserstoffs im Grundzustand.
Hinweis: Bindungszustände sind nur stabil, wenn i) die Bindungsenergie die kinetische Energie der Teilchen übertrifft und ii) der mittlere Abstand zweier Teilchen größer ist als die Ausdehnung der Wellenfunktion [warum?]. In der Aufgabenstellung wurde die Bildung von H_2 -Molekülen vernachlässigt. In welchem Dichte-Temperaturbereich ist dies gerechtfertigt? (13 Punkte)