

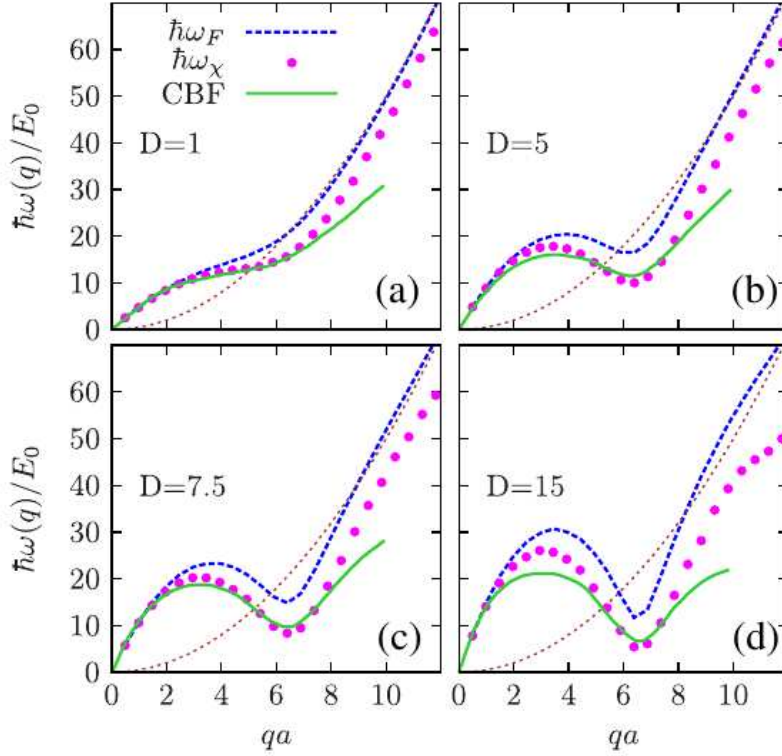


Abbildung 6.11: Einteilchen-Dispersion des 2D-Dipolsystems (6.61) aus Abb. 6.10 für $T = 0.5$ und vier Wechselwirkungs-Stärken. Anstelle der gewöhnlichen parabolischen Energie-Dispersion $\hbar\omega(q) = q^2/2$ stellt sich hier die gepunktete Kurve (pink) ein. Für kleine Impulse q dominieren Phononen (lineare Dispersion), bis sich ein Minimum einstellt, das sog. Rotonen entspricht. Resultat von Pfadintegral-Monte-Carlo-Simulationen aus Ref. [Filinov et al., 2010]. Die anderen Kurven stellen andere Modelle dar, die Näherungscharakter besitzen.

von Berezinski, Kosterlitz und Thouless untersucht⁴⁶.

Der Mechanismus der Suprafluidität lässt sich am Einteilchen-Spektrum verstehen, das in Abb. 6.11 gezeigt ist. Die gepunktete Linie zeigt die gewöhnliche quadratische Dispersion freier Teilchen. Mit wachsendem D weicht die Dispersion des nichtidealen Bosegases (violette Punkte) immer stärker von der idealen Dispersion ab⁴⁷. Während das Verhalten bei großen Impulsen sich dem des idealen Gases wieder annähert, gibt es drastische Unterschiede bei kleinen und mittleren Impulsen. Für den Reibungsverlust ist vor allem der lineare Anstieg bei kleinen Impulsen verantwortlich, $\epsilon(p) \approx c_s p$, wobei c_s eine effektive Geschwindigkeit ist. Er bedeutet, dass Anregungen, z.B. durch thermische Fluktuationen, stark unterdrückt sind. Eine Flüssigkeit, die mit einer Geschwindigkeit $u < c_s$ strömt, kann daher keine Energie an die Bosonen abgeben (das wäre gleichbedeutend mit Reibung, Viskosität) und fließt daher verlustfrei. Der Wert von c_s wächst mit D , somit wird der Effekt durch die Wechselwirkung verstärkt. Bemerkenswert ist auch das Minimum der Dispersion in der Gegend von $qa \sim 6$, das

⁴⁶Kosterlitz, Thouless und Haldane erhielten 2016 den Nobelpreis für die Untersuchung von topologischen Phasenübergängen.

⁴⁷Dieses Spektrum ergibt sich aus der näherungsweisen Diagonalisierung des Hamiltonians mit Wechselwirkung, Glg. (6.61). Die Ergebnisse hier wurden mit exakten Pfadintegral-Monte-Carlo-Simulationen gewonnen.

sich bei großen D einstellt. Es ist verknüpft mit sog. Rotonen. Das sind kollektive Anregungen von Teilchengruppen, die häufig Rotations-Charakter (Wirbel) besitzen. Abschließend sei bemerkt, dass eine solche nicht-monotone Dispersion nicht nur in Bosegasen auftritt. Sie wurde auch in stark wechselwirkenden klassischen Systemen geladener Teilchen gefunden, s. z.B. Ref. [Golden and Kalman, 2000], sowie im Fermigas (Elektronengas bzw. -Flüssigkeit) bei starker Kopplung [Dornheim et al., 2022].

6.4 Das Photonengas. Plancksches Strahlungsgesetz

6.4.1 Photonen als ultrarelativistische Bosonen

Elektromagnetische Wellen besitzen eine lineare Frequenz-(Energie-)Dispersion, $\omega(k) = ck$, wozu eine lineare Energiedispersion korrespondiert. Durch Multiplikation mit $\hbar$ folgt

$$\epsilon_p = \hbar\omega = c|\mathbf{p}|, \quad \mathbf{p} = \hbar\mathbf{k},$$

was exakt mit dem Verhalten ultrarelativistischer Bosonen übereinstimmt, die wir in Abschn. 6.3.5 untersucht hatten. Eine Besonderheit der bosonischen Anregungen des elektromagnetischen Feldes (der Photonen) besteht darin, dass es im allgemeinen drei Polarisationsrichtungen der Wellen gibt⁴⁸: zwei transversale und eine longitudinale, das heißt, jeder Energiezustand ist 3-fach entartet. Photonen verhalten sich also wie Bosonen mit Spin $s = 1$.

Im Folgenden betrachten wir nur die elektromagnetischen Wellen und verwenden daher den Entartungsfaktor⁴⁹ $g_s = 2$. Die Zustandssumme des Photonengases ergibt sich somit aus dem Resultat für das ultrarelativistische ideale Bosegas (mit $\mu = 0$), Glg. (6.57), gemäß

$$\mathcal{D}_{\text{ph}}(\epsilon) = g_s \mathcal{D}_{\text{UR}}(\epsilon),$$

wobei jeder Energiezustand eine mittlere Besetzung aufweist, die durch die Bose-Verteilung, $n(\epsilon) = [e^{\beta\epsilon} - 1]^{-1}$, gegeben ist. Die Zahl der Photonen im Energie-Intervall $[\epsilon, \epsilon + d\epsilon]$ ist daher

$$dN(\epsilon) = n(\epsilon) \mathcal{D}_{\text{ph}}(\epsilon) d\epsilon.$$

Daraus folgt die spektrale Dichte der Photonen pro Volumen ($n = N/V$, $\epsilon = \hbar\omega$)

$$\begin{aligned} \frac{dn(\omega)}{d\omega} &= \frac{1}{V} \frac{dN(\epsilon)}{d\epsilon} \hbar = \frac{4\pi}{c^3} \frac{\hbar}{h^3} (\hbar\omega)^2 g_s n(\hbar\omega) = \\ &= \frac{1}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^2}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}, \end{aligned}$$

sowie die räumliche Energiedichte ($u = U/V$) im Intervall $[\omega, \omega + d\omega]$

$$\begin{aligned} \frac{du(\omega)}{d\omega} &= \hbar\omega \frac{dn(\omega)}{d\omega} = \\ &= \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}. \end{aligned}$$

Diese Formel unterscheidet sich von der Planckschen Strahlungsformel durch einen Faktor 4. Das liegt daran, dass Planck die Strahlung betrachtet hat, die aus einem Hohlraum durch eine kleine Öffnung austritt (Schwarzer Körper nach Kirchhoff). Unser Resultat dagegen beschreibt ein Photonengas mit isotroper Geschwindigkeits-Verteilung, bei der der Erwartungswert von $|\mathbf{v}| = c$ ist. Wenn dagegen nur Photonen betrachtet werden, die in eine vorgegebenen Richtung fliegen (z.B. in positiver

⁴⁸Die transversalen Wellen entsprechen den elektromagnetischen Wellen im Vakuum, während die longitudinale vor allem in Medien relevant ist, z.B. Plasmaoszillationen beschreibt.

⁴⁹Wir folgen hier der Herleitung bei Greiner.

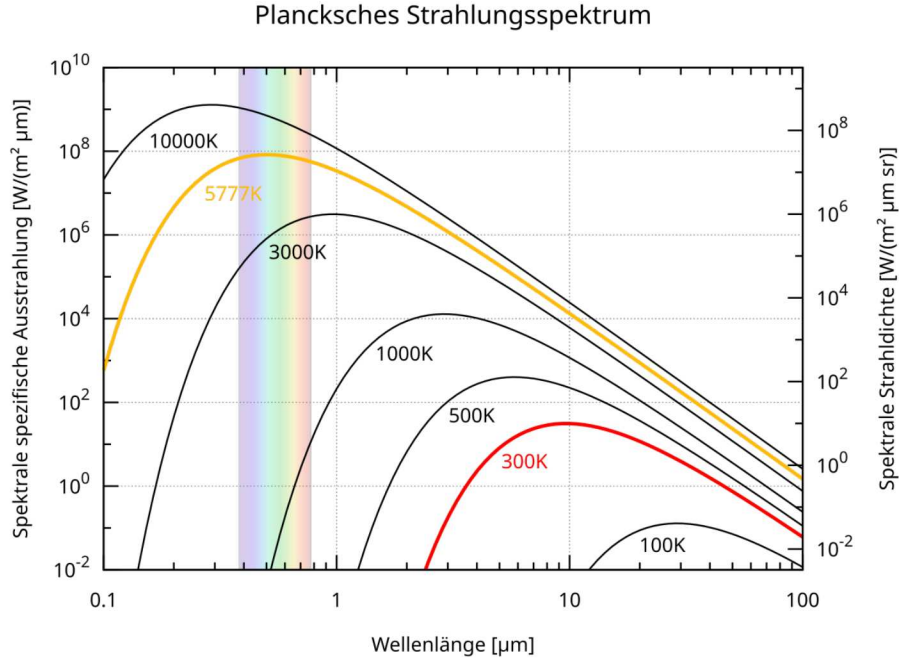


Abbildung 6.12: Plancksches Strahlungsspektrum für verschiedene Temperaturen (doppelt logarithmisch). Das Wiensche Verschiebungsgesetz ist klar ablesbar.

z -Richtung), so folgt für den Mittelwert der z -Projektion ($v_z > 0$) einer isotropen Verteilung $\langle v_z \rangle = \frac{1}{4} \langle |v| \rangle = c/4$ und wir erhalten für die spektrale Energiedichte der Hohlraumstrahlung

$$\begin{aligned} \rho(\omega) &= \frac{c}{4} \hbar \omega \frac{dn(\omega)}{d\omega} \\ &= \frac{\hbar}{4\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\beta \hbar \omega} - 1}. \end{aligned} \quad (6.62)$$

Das ist die Plancksche Strahlungsformel, die er im Oktober 1900 erstmals der Öffentlichkeit vorgestellt hatte, ohne etwas von Bosestatistik zu wissen. Das Resultat stimmte hervorragend mit den experimentellen Daten überein und wurde durch neuere Messungen immer wieder bestätigt. Für die Ableitung der Formel, die er vorher durch Kombination der Wien- sowie Rayleigh-Formeln gefunden hatte⁵⁰ (s. Grenzfälle unten) führte Planck seine Quantenhypothese, $E = Nh\nu$, ein und leitete damit die korrekte Entropieformel für ein ideales Bosegas ab, die ihn auf seine Formel(6.62) für die Energiedichte führte⁵¹.

Bemerkungen:

- Im Grenzfalle hoher Frequenzen, $\hbar\omega \gg k_B T$ ergibt sich aus (6.62), mit der Entwicklung

$$\frac{1}{e^{\beta \hbar \omega} - 1} \approx e^{-\beta \hbar \omega} \{1 + e^{-\beta \hbar \omega}\},$$

⁵⁰Details zu seiner Ableitung werden in Abschn. 6.4.3 gegeben.

⁵¹Für seine Beiträge zum Strahlungsgesetz und zur Energie-Quantisierung erhielt Planck den Nobelpreis 1918.

$$\rho(\omega) \approx \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2c^3} e^{-\beta\hbar\omega} \{1 + e^{-\beta\hbar\omega}\},$$

wobei der erste Term die Wienformel darstellt⁵² (entspricht unterscheidbaren Teilchen mit Boltzmann-Statistik und kontinuierlichen Energien) und der zweite die erste Quantenkorrektur.

- Niedrige Frequenzen: $\hbar\omega \ll k_B T$. Dann vereinfacht sich die Boseverteilung zu

$$\frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} \approx \frac{1}{\beta\hbar\omega + \frac{1}{2}(\beta\hbar\omega)^2} \approx \frac{k_B T}{\hbar\omega} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\hbar\omega}{k_B T}\right),$$

und die Planck-Formel geht über in

$$\rho(\omega) \approx \frac{\omega^2 k_B T}{4\pi^2 c^3} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\hbar\omega}{k_B T}\right).$$

Der erste Term reproduziert die Formel von Rayleigh (bzw. Rayleigh-Jeans) und der zweite die erste Quantenkorrektur.

- Das Maximum der Planck-Kurve (6.62) folgt gemäß

$$0 = \frac{\omega^3}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} \left\{ \frac{3}{\omega} - \frac{\hbar}{k_B T} \frac{e^{\beta\hbar\omega}}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} \right\},$$

$$\rightarrow e^x(3 - x) = 3, \quad x = \beta\hbar\omega_{\max},$$

mit der Lösung $\hbar\omega_{\max} \approx 2.821 k_B T$. Diese Proportionalität ist Inhalt des *Wien-schen Verschiebungsgesetzes*, s. Abb. 6.12. Allerdings lautete Wiens Resultat (ohne die 1 in der Boseverteilung) $\hbar\omega_{\max} = 3 k_B T$. Die Wiensche Formel versagt also nicht nur bei kleinen Frequenzen, sondern liefert auch ein ungenaues Resultat für das Maximum der Kurve.

6.4.2 Thermodynamische Eigenschaften des Photonengases.

Die thermodynamischen Eigenschaften stimmen nahezu vollständig mit denen des ultrarelativistischen Bosegases überein, abgesehen von dem zusätzlichen Entartungsfaktor $g_s = 2$. Wir notieren die wichtigsten Resultate:

- Großkanonisches Potential: in Analogie zu Glg. (6.58) gilt

$$\Omega(T, V) = -\frac{V}{\Lambda_R^3} k_B T \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\pi^4}{15},$$

wobei wir $g_4 = \frac{\pi^4}{15}$ benutzt haben.

- Innere Energie: das Resultat lautet

$$U(V, T) = \frac{V}{\Lambda_R^3} k_B T \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2\pi^4}{15} \propto T^4,$$

⁵²Für seine Ergebnisse zur Hohlraumstrahlung erhielt W. Wien 1911 den Physik-Nobelpreis.

- Energie-Dichte und Stefan-Boltzmann-Gesetz: Division durch das Volumen und Einsetzen von Λ_R ergibt

$$\frac{U(V, T)}{V} = \frac{\pi^2 (k_B T)^4}{15 \hbar^3 c^3} \equiv \frac{4}{c} \sigma T^4, \\ \sigma = \frac{\pi^2 k_B^4}{60 \hbar^3 c^2} = 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}, \quad \text{Stefan-Boltzmann-Konstante}$$

- Entropie: Für die Entropie sind unsere allgemeinen Betrachtungen anwendbar, so dass die Formel lautet

$$\frac{S^B(T, V, \mu)}{k_B} = \sum_p \{ (1 + n_p) \ln(1 + n_p) - n_p \ln n_p \},$$

wobei hier der Orbitalindex durch die Frequenz der Photonen zu ersetzen ist, $p \rightarrow \nu$. Man beachte, dass hier das großkanonische Ensemble zugrunde liegt und die Besetzungszahlen i.a. keine diskreten Werte annehmen, da sie von der Temperatur und der Frequenz (ihrem Produkt) abhängen, $n_p = n_p(\beta \hbar \omega)$.

6.4.3 Plancks erste Ableitung der Strahlungsformel

Es ist interessant, die Resultate für ein ultrarelativistisches ideales Bosegas mit dem Zugang von Max Planck aus den Jahren 1899-1900 zu vergleichen. Nach Planck⁵³ ist die Energie eines Oszillators der Frequenz ν gegeben durch

$$U_\nu = \frac{c^2}{\nu^2} \cdot \rho_\nu, \quad (6.63)$$

wobei $\rho_\nu d\nu d\Omega dt$ die Energie (die Intensität) ist, die ein linear polarisierter Strahl pro Zeiteinheit und Flächenelement, das durch einen Öffnungswinkel $d\Omega$ charakterisiert ist, besitzt. Planck ging davon aus, dass die elektromagnetische Strahlung im Hohlraum im Gleichgewicht mit den Wänden ist und dass deren Energie in jeder Mode fixiert ist. Daher suchte er U_ν aus der Bedingung, dass die zugehörige Entropie maximal ist – er setzte also das mikrokanonische Ensemble voraus. Das bedeutet im Gleichgewicht (für ν fixiert)

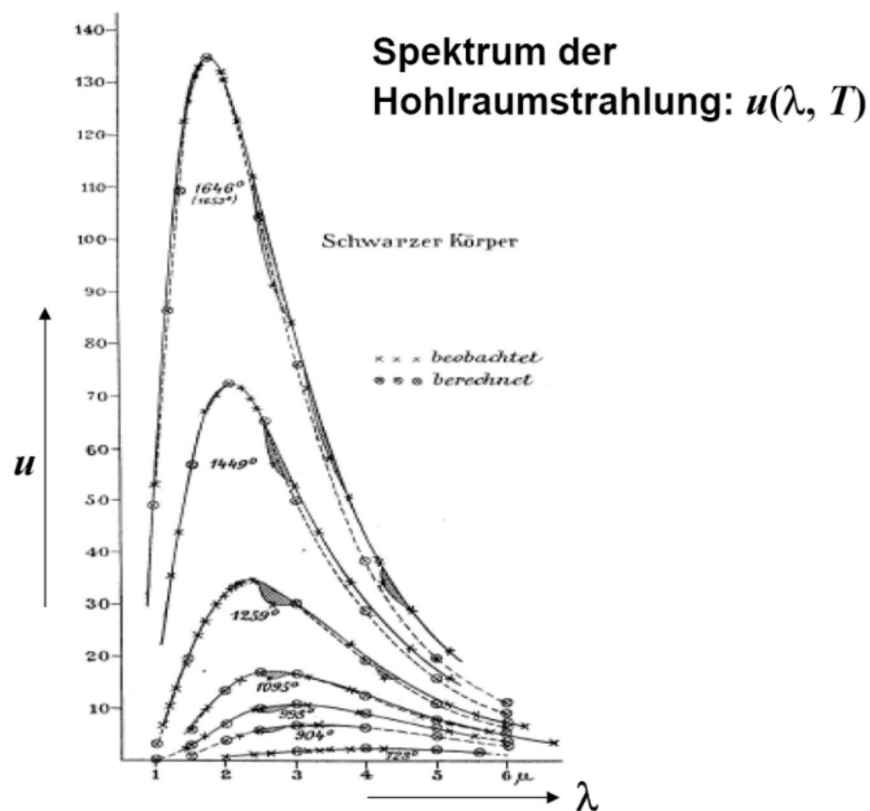
$$\left. \frac{dS}{dU} \right|_{VN} = \frac{1}{T}, \\ \left. \frac{d^2 S}{dU^2} \right|_{VN} \equiv \frac{1}{R} = \left. \frac{d}{dU} \frac{1}{T} \right|_{VN} \leq 0.$$

Die Bedeutung von R ist dabei leicht zu verstehen:

$$\frac{1}{R} = - \frac{1}{T^2} \left. \frac{dT}{dU} \right|_{VN} = - \frac{1}{T^2} \frac{1}{C_{VN}}, \\ \text{also } R = -T^2 C_{VN},$$

R ist also direkt verknüpft mit der Wärmekapazität der Strahlung.

⁵³Wir folgen seiner Darstellung im Nobelvortrag.



Messung von Lummer und Pringsheim (1900)

Abbildung 6.13: Hohlraumstrahlung im Mikrometer-Bereich: Vergleich der Messungen von Lummer und Pringsheim (Physikalisch-Technische Reichsanstalt 1899-1900, obere Kurven) und des Modells von Wien (untere Kurven) für 7 Temperaturen.

I. Große Frequenzen.

$$\rho_\nu^W = \frac{b\nu^3}{c^2} e^{-\frac{a\nu}{T}},$$

wobei a und b zwei universelle (material-unabhängige) Konstanten sind. Diese Formel hatte W. Wien bereits 1896 publiziert. Planck hatte sie unabhängig abgeleitet aus einer Formel für die Entropie⁵⁴

$$S_\nu^W = -\frac{U}{a\nu} \ln \frac{U}{eb\nu},$$

woraus er für den Kehrwert der zweiten Ableitung erhielt

$$R^W = -a\nu U$$

II. Niedrige Frequenzen (große Wellenlängen). Die Wienformel lieferte zunächst sehr gute Übereinstimmung mit den Experimenten, bis allerdings größere Wellenlängen λ im Bereich von einigen μm zugänglich wurden⁵⁵, die mit wachsendem λ immer mehr auf einen systematischen Fehler hindeuteten. Stattdessen schien eine Formel von Lord Rayleigh⁵⁶ deutlich besser zu “passen”⁵⁷:

$$U^R = d \cdot T,$$

wobei d eine Konstante ist, woraus Planck für die Entropie und das Inverse ihrer zweiten Ableitung fand

$$S^R = d \cdot \ln U,$$

$$R^R = -\frac{U^2}{d}.$$

III. Plancks Kombinations-Ansatz für beliebige Frequenzen. Da die Wienformel sehr gut für mittlere und große Frequenzen mit dem Experiment übereinstimmte und die Rayleigh-Formel für kleine Frequenzen, ging Planck davon aus, dass eine geeignete Kombination im gesamten Frequenzbereich funktionieren sollte. Er vermutete, dass dafür die Größen R der beiden Grenzfälle zu addieren sind⁵⁸.

$$R^P \equiv R^W + R^R = -\left(a\nu U + \frac{U^2}{d}\right), \quad (6.64)$$

$$C_{VN}^P \equiv C_{VN}^W + C_{VN}^R = \frac{1}{T^2} \left(a\nu U + \frac{U^2}{d}\right).$$

⁵⁴M. Planck, Sitzungsber. Berl. Akad. Wiss. 18.5. 1899

⁵⁵Messungen von Lummer und Pringsheim, sowie Rubens und Kurlbaum an der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt in Berlin (PTR)

⁵⁶Rayleigh 1900. Diese Formel publizierte er 5 Jahre vor dem bekannten Rayleigh-Jeans-Gesetz.

⁵⁷statt Plancks Bezeichnung C verwenden wir d , um Verwechslungen zu vermeiden

⁵⁸Eine Addition der Wärmekapazitäten beider Grenzfälle erscheint uns heute folgerichtig, da häufig in unterschiedlichen Energie- (oder Frequenzbereichen) unterschiedliche physikalische Prozesse aktiv sind. Man denke etwa an Atome oder Moleküle. Bei Planck findet sich allerdings kein Hinweis, dass er die Wärmekapazität in Betracht zog.

Durch Integration erhielt Planck die erste Ableitung der Entropie nach der Energie, sowie durch nochmalige Integration, die Entropie⁵⁹

$$\left. \frac{dS}{dU} \right|_{V,N} = \frac{1}{a\nu} \ln \left(1 + \frac{h\nu}{U} \right) \equiv \frac{1}{T}, \quad (6.65)$$

$$S = \frac{h}{a} \left[\left(\frac{U}{h\nu} + 1 \right) \ln \left(\frac{U}{h\nu} + 1 \right) - \frac{U}{h\nu} \ln \frac{U}{h\nu} \right]. \quad (6.66)$$

Daraus folgte sofort seine Strahlungsformel. Dazu ist nur die rechte Glg. (6.65) nach U aufzulösen:

$$e^{\frac{a\nu}{T}} = 1 + \frac{h\nu}{U}, \quad \text{bzw.} \\ U_\nu(T) = \frac{h\nu}{e^{\frac{a\nu}{T}} - 1}.$$

Dieses Ergebnis stellte er am 19. Oktober 1900 auf einer Sitzung der Physikalischen Gesellschaft in Berlin vor und erhielt umgehend die Bestätigung von Seiten der Experimentalphysik-Kollegen aus der PTR. Die spektrale Strahlungsintensität folgt dann aus Glg. (6.63):

$$\rho_\nu = \frac{h\nu^3/c^2}{e^{\frac{a\nu}{T}} - 1},$$

wobei Planck die Konstante a aus seiner zweiten Ableitung als $a = h/k_B$ identifizieren konnte, s. Abschn. 6.4.4.

Natürlich war Planck klar, dass der Ausdruck $h\nu$ die Dimension einer Energie hat, aber es war unklar, welche Bedeutung diese Größe trägt.

6.4.4 Plancks zweite Ableitung der Strahlungsformel. Energiequantisierung

Sofort nach der experimentellen Bestätigung seiner Strahlungsformel begann Planck, nach einer systematischen Ableitung von Formel (6.66) zu suchen, denn der bisherige Weg der "Kombination" der beiden Fälle ließ sich nicht streng begründen.

Zur Berechnung der Entropie konzentrierte er sich auf das mikrokanonische Ensemble und versuchte, den wahrscheinlichsten Zustand des elektromagnetischen Felds zu finden. Da im mikrokanonischen Ensemble alle Zustände mit den selben Werten von U, N, V gleichwahrscheinlich sind, reduzierte sich die Aufgabe auf die Bestimmung der Zahl Z_μ der Mikrozustände, also auf die Zustandssumme. Dies war inspiriert durch Boltzmann und seine Verknüpfung von Z_μ mit der Entropie, $S = k_B \ln Z_\mu$.

Um Z_μ zu bestimmen, suchte Planck nach einer Darstellung durch eine diskrete Zahl von Mikrozuständen. Er schrieb "...dachte ich mir ein Gebilde, bestehend aus einer sehr großen Anzahl N von gleichartigen Oszillatoren, und suchte die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, daß dies Gebilde die vorgegebene Energie U_N besitzt. Da nun eine Wahrscheinlichkeitsgröße nur durch Abzählung gefunden werden kann, so war es vor allem notwendig, die Energie U_N als eine Summe von diskreten, einander gleichen

⁵⁹Planck verwendete zunächst $a' = a \cdot d$ und ersetzte das später durch die Planck-Konstante h .

Elementen ϵ anzusehen, deren Anzahl durch die ebenfalls sehr große Zahl P bezeichnet sein möge. Also

$$U_N = N \cdot U = P \cdot \epsilon, \quad (6.67)$$

wobei U die mittlere Energie eines Oszillators bedeutet.”

Planck berechnete dann die Anzahl der Möglichkeiten, P Elemente auf N Oszillatoren zu verteilen, wobei ϵ noch unbestimmt blieb:

$$Z_\mu = \frac{(P+N)!}{P!N!} \approx \frac{(P+N)^{P+N}}{P^P N^N}, \quad (6.68)$$

wobei am Ende wegen der angenommenen Größe von N und P die Stirling-Formel verwendet wurde. Damit ergibt sich für Boltzmanns Entropie

$$\frac{1}{k_B} S_N = \frac{N}{k_B} S = \ln Z_\mu \approx (P+N) \ln(P+N) - P \ln P - N \ln N,$$

und schließlich für die Entropie eines Oszillators einer fixierten Frequenz ν

$$S = k_B \left\{ \left(\frac{P}{N} + 1 \right) \ln \left(\frac{P}{N} + 1 \right) - \frac{P}{N} \ln \frac{P}{N} \right\}. \quad (6.69)$$

Die Übereinstimmung von (6.69) mit der bisherigen Formel (6.66) ist evident, wenn $U/h\nu = P/N$ gesetzt wird, d.h., wenn für die Konstanten folgende Zusammenhänge gelten:

$$\begin{aligned} k_B &= \frac{h}{a}, \\ \epsilon &= h\nu. \end{aligned}$$

Aus dem Vergleich mit dem Experiment hatte Planck bereits frühzeitig die Zahlenwerte

$$\begin{aligned} k_B &= 1.346 \cdot 10^{-16} \frac{\text{erg}}{\text{grad}} = 1.346 \cdot 10^{-23} \frac{Ws}{K}, \\ h &= 6.55 \cdot 10^{-27} \text{erg} \cdot \text{sec} = 6.55 \cdot 10^{-34} Ws^2, \end{aligned}$$

für die von ihm eingeführten Konstanten – die Boltzmann-Konstante und das Wirkungsquantum – bestimmt und war überzeugt, dass es sich dabei um universelle Konstanten handelt⁶⁰. Diese Ableitung stellte Planck auf einer Sitzung der Berliner Physikalischen Gesellschaft am 14.12. 1900 vor. Dieses Datum wird seitdem als “Geburtsstunde der Quantentheorie” bezeichnet.⁶¹

Bemerkungen:

- Viele Details von Plancks Überlegungen sind nicht bekannt oder schwer nachzuvollziehen. So wissen wir nicht genau, was ihn zur Kombination (6.64) bewog, die ganz offensichtlich korrekt ist.

⁶⁰Wegen der Universalität der Maxwellgleichungen und der Eigenschaften der elektromagnetischen Wellen glaubte er, dass die gefundenen Konstanten “für alle Zeiten und Kulturen gelten sollen”, einschließlich “außerirdischer und außermenschlicher”.

⁶¹Für diese Ergebnisse erhielt Planck 1919 den Nobelpreis (rückwirkend für 1918). Eine Kopie liegt im Kieler Max-Planck-Museum.

- Man darf vermuten, dass Planck den Ausdruck (6.68) für die Zustandssumme aus dem Vergleich der Entropieformeln (6.66) und (6.69) korrekt identifiziert hat. Sein Modell (“Gebilde” im Zitat oben), mit dem er Formel (6.68) motiviert, ist allerdings nur bedingt nachzuvollziehen. Die N Oszillatoren sind am ehesten als Repräsentanten des Ensembles aufzufassen. Tatsächlich lässt sich die Bosestatistik als kombinatorisches Problem formulieren, s. Abschn. 6.4.5.
- Auch wenn Planck in seinem Vortrag am 14.12. 1900 von einer Quantisierung der Energie der Oszillatoren ausging, so sah er das vor allem als “Rechentrick” an, um die Zustandssumme auszurechnen. In seinem Vortrag sagte er auch über das Verhältnis P/N in Formel (6.69): “Wenn der so berechnete Quotient keine ganze Zahl ist, so nehme man für P eine in der Nähe gelegene ganze Zahl.” Das mag ihm notwendig erschienen sein, da er ja in seinem “Gebilde” keine Einschränkungen bezüglich P und N gemacht hatte, so dass rationale Zahlen für das Verhältnis nicht ausgeschlossen waren⁶².
- Diese Bemerkung Plancks relativiert allerdings nicht seine Quantenhypothese⁶³. Im Gegenteil: die Forderung, dass P/N immer ganzzahlig sein soll, bedeutet ja nichts anderes als dass U ein ganzzahliges Vielfaches von $h\nu$ ist, dass also eine strenge Quantisierung der Energie eines einzelnen Oszillators vorliegt. Dies ist eine stärkere Forderung als seine Ausgangsgleichung (6.67), die ja nur eine strenge *Quantisierung der Gesamtenergie* von N Oszillatoren impliziert. Es ist diese Formel, die die Quantenidee in die Welt gesetzt hat und damit der Auslöser für den Umsturz unseres Weltbildes wurde⁶⁴.
- Die Formel (6.67) ist in der Wahrscheinlichkeitstheorie bekannt als *Kombination mit Wiederholung*. Dabei werden aus einer Menge von N Elementen P ausgewählt (oder umgekehrt), wobei deren Reihenfolge keine Rolle spielt, s. Abschn. 6.4.5.
- Vergleicht man Plancks Ergebnisse mit denen für das ideale Bosegas, für das die Entropie (der Beitrag für ein Orbital) gegeben war durch Glg. (6.45)

$$\frac{S_p(\mu, V, T)}{k_B} = [\langle n_p \rangle_G + 1] \ln [\langle n_p \rangle_G + 1] - \langle n_p \rangle_G \ln \langle n_p \rangle_G, \quad (6.70)$$

so ist auch hier die Analogie evident. Dabei ist hier p mit einer Photonenmode der Frequenz ν zu identifizieren⁶⁵, wobei Plancks Ergebnis, $U/\epsilon = P/N$ zu n_p korrespondiert. Während Planck im mikrokanonischen Ensemble arbeitete, wo U festgelegt ist und keine Temperatur existiert, ist Glg. (6.70) im großkanonischen Ensemble formuliert. Während die Besetzungszahlen, $n_p = 0, 1, 2, \dots$, natürliche Zahlen sind, enthält die Formel den großkanonischen Erwartungswert der Besetzungszahl der Mode (die Boseverteilung). Dieser ist i.d.R. keine natürliche Zahl und abhängig von T und μ .

⁶²Die Interpretation der Energiequanten als physikalische Realität hat zuerst Einstein in seiner Arbeit zur Erklärung des Photoeffekts verwendet. Wir wissen aus vielen Äußerungen Plancks, dass er wenigstens bis 1913 noch dieser Interpretation physikalischer Energiequanten skeptisch gegenüber stand.

⁶³s. z.B. Vortrag von A. Schirmacher, 23. 4. 2025 in Kiel.

⁶⁴Natürlich ließ auch diese Formel zu, dass die Energie U eines einzelnen Oszillators kein ganzzahliges Vielfaches von ϵ darstellt.

⁶⁵In einem finiten System sind die ν diskret, in einem makroskopischen quasikontinuierlich.

6.4.5 Fermi- und Bosestatistik als kombinatorisches Problem

Sowohl Fermi- als auch Bosestatistik lassen sich kombinatorisch formulieren. Dabei zeigt sich, dass Plancks Ansatz die korrekte Bose-Statistik reproduziert.

Wir betrachten ein quantenmechanisches Vielteilchensystem mit N_i Teilchen im Energieniveau E_i . Der entscheidende Punkt ist, dass wir zulassen, dass dieses Niveau g_i -fach entartet ist. Wir berechnen jetzt die Zahl der Möglichkeiten, diese N_i Teilchen auf die g_i Zustände zu verteilen. Mit N_i fixiert ist auch die Energie fixiert, und wir können das mikrokanonische Ensemble verwenden.

Fermionen. Wegen des Pauliprinzip ist jedes Energieniveau nur einfach besetzt oder leer, s. Abb. 6.14. Die Zustandssumme (Zahl der Mikrozustände) entspricht daher der Zahl der Möglichkeiten, aus g_i Elementen N_i verschiedene auszuwählen:

$$Z_{\mu,i}^F = \frac{g_i!}{N_i!(g_i - N_i)!}.$$

Für große N_i und g_i folgt mit der Stirling-Formel für den Logarithmus der Zustandssumme

$$\begin{aligned} \ln Z_{\mu,i}^F &\approx g_i \ln g_i - N_i \ln N_i - (g_i - N_i) \ln(g_i - N_i) = \\ &= g_i \left\{ \ln g_i - \frac{N_i}{g_i} \left[\ln \frac{N_i}{g_i} + \ln g_i \right] - \left(1 - \frac{N_i}{g_i} \right) \left[\ln \left(1 - \frac{N_i}{g_i} \right) + \ln g_i \right] \right\}. \end{aligned}$$

Die Terme mit $\ln g_i$ kürzen sich, und wir erhalten für die Entropie pro Zustand

$$\frac{1}{g_i} \frac{S_{\mu,i}^F}{k_B} = - \left(1 - \frac{N_i}{g_i} \right) \ln \left(1 - \frac{N_i}{g_i} \right) - \frac{N_i}{g_i} \ln \frac{N_i}{g_i}.$$

[check last sign!]

Wenn wir $N_i/g_i \equiv n_i$ als mittlere Besetzung des Energie-Zustandes E_i (also als mittlere Besetzungszahl) auffassen, reproduzieren wir exakt die Entropieformel des idealen Fermigases, Glg. (6.45) für ein Orbital.

Bosonen. Da es kein Pauliprinzip gibt, kann jeder der g_i Zustände beliebig oft ($0, 1, \dots, N_i$ -fach) besetzt werden, s. Abb. 6.14. Die Zustandssumme (Zahl der Mikrozustände) entspricht daher der Zahl der Möglichkeiten, N_i Elemente auf g_i Plätze in beliebiger Reihenfolge und Häufigkeit zu verteilen (Kombination mit Wiederholung)

$$Z_{\mu,i}^B = \frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i!(g_i - 1)!}.$$

Die Rechnung ergibt für den Logarithmus, unter Verwendung der Stirling-Formel⁶⁶

$$\begin{aligned} \ln Z_{\mu,i}^B &\approx (N_i + g_i) \ln(N_i + g_i) - N_i \ln N_i - g_i \ln g_i = \\ &= g_i \left\{ \left(1 + \frac{N_i}{g_i} \right) \ln \left(1 + \frac{N_i}{g_i} \right) - \frac{N_i}{g_i} \ln \frac{N_i}{g_i} \right\}. \end{aligned}$$

Genau wie bei den Fermionen führt das auf die Entropie pro Zustand, die jetzt die modifizierte Form besitzt:

$$\frac{1}{g_i} \frac{S_{\mu,i}^B}{k_B} = \left(1 + \frac{N_i}{g_i} \right) \ln \left(1 + \frac{N_i}{g_i} \right) - \frac{N_i}{g_i} \ln \frac{N_i}{g_i},$$

⁶⁶es ist exakt die von Planck durchgeführte Rechnung

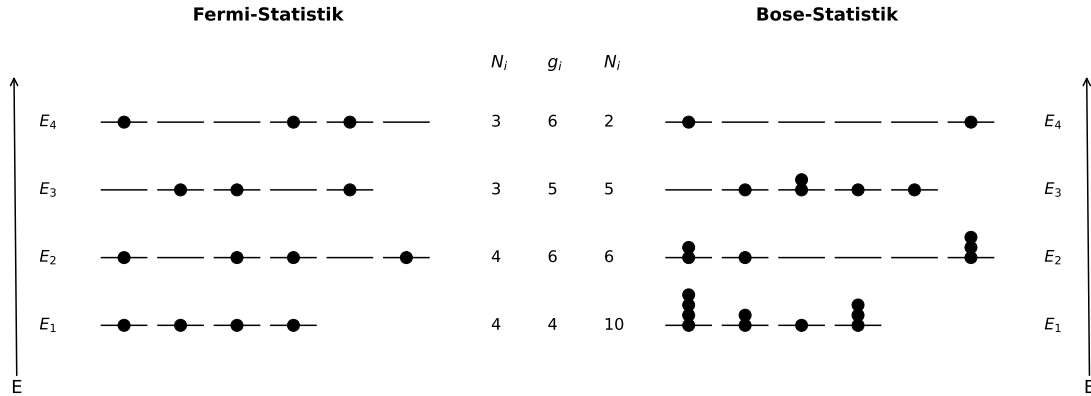


Abbildung 6.14: Besetzungszahlen N_i der Energiezustände E_i , die g_i -fach entartet sind, für Fermionen links und für Bosonen rechts. Die Zahl N_i der Teilchen auf Energieniveau E_i kann bei Fermionen g_i nicht übersteigen (Pauli-Prinzip), für Bosonen ist sie nur durch die Gesamtteilchenzahl begrenzt. Abb. aus Ref. [Bonitz et al., 2026].

was ebenfalls wieder mit unserem Resultat (6.45) übereinstimmt bei der Ersetzung $N_i/g_i \rightarrow n_i$.

Damit haben wir Plancks zweite Ableitung bestätigt und gleichzeitig eine physikalische Interpretation gefunden: unsere N_i Teilchen entsprechen seinen P identischen Energieportionen und seine N Kopien der Oszillatoren unseren g_i Zuständen zum entarteten Energieniveau “i” (Oszillatormode der Eigenfrequenz ν). Für die Anwendung der Stirling-Formel muss dieser Entartungsfaktor jeder Frequenzmode sehr groß sein.

Die Besetzungszahlen bleiben hier zunächst offen. Sie lassen sich natürlich aus dem Maximum der Gesamtentropie (Summe über alle Energiezustände bzw. Oszillatormoden bei fixierter Teilchenzahl und Gesamtenergie) bestimmen.

6.4.6 Planckstrahlung aus dem All: die kosmische Hintergrundstrahlung

Die heute beobachtete (und seit sehr langer Zeit anhaltende) Expansion des Universums legt nahe, dass die Evolution mit einer Explosion aus einem extrem komprimierten und extrem heißen Zustand begonnen hat – dem Urknall. In diesem Zustand können keine zusammengesetzten Partikel wie Atome oder Kerne existiert haben, sondern nur die Grundbausteine der Materie: Elektronen, Positronen, Quarks und Photonen. Erst während der Expansion und der damit verbunden Abkühlung können sich Protonen, Neutronen und daraus Kerne gebildet haben. Anschließend werden die Kerne Elektronen eingefangen haben, so dass Ionen (Plasma) und schließlich neutrale Atome entstanden sind. Der Ablauf ist in Abb. 6.15 schematisch dargestellt⁶⁷.

Interessant ist zu untersuchen, wie sich die Photonen während der verschiedenen Etappen verhalten haben. In der Frühphase sollte es intensive Streuprozesse von Photonen an geladenen Teilchen gegeben haben (Thomson- bzw. Compton-Streuung), die

⁶⁷Das zugehörige Phasendiagramm hatten wir in Abb. 6.4 gezeigt.

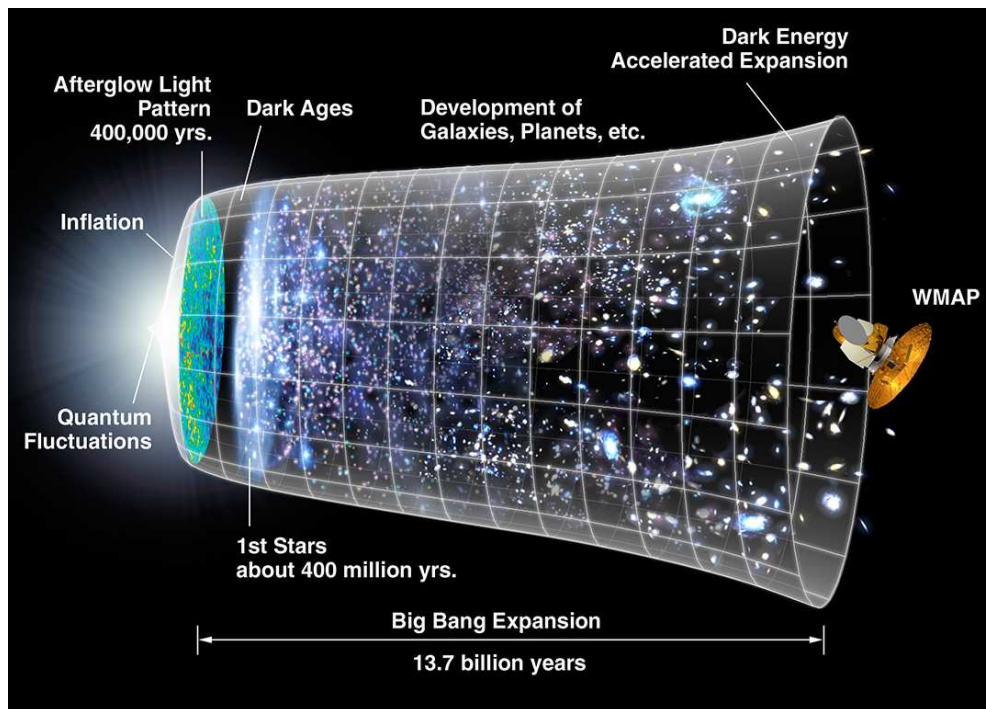


Abbildung 6.15: Schematische Darstellung der Expansion des Universums seit dem Urknall (links) bis heute (rechts). In der Frühphase lag ein extrem heißes und extrem dichtes Quark-Gluon-Lepton-Photon-Plasma vor. Nach ca. 400 000 Jahren war die Bildung von Atomen abgeschlossen, so dass das Universum für Photonen transparent wurde. Diese “kosmische Hintergrundstrahlung” wird heute mit Satelliten (gezeigt ist WMAP) genau vermessen und liefert hochpräzise Informationen über das Universum und seine Geschichte, s. Text. Quelle: Wikipedia

die Eigenschaften des Photonengases ständig stark modifiziert haben (Nichtgleichgewicht). Sobald allerdings (neutrale) Atome dominiert haben, wurden die Photonen nur noch geringfügig abgelenkt⁶⁸, das Universum wurde “durchsichtig”. Wenn das Urknall-Modell korrekt sein sollte, müsste es daher auch heute noch Signale aus der Frühphase des Universums geben: Photonen, die genügend Zeit hatten, das thermodynamische Gleichgewicht zu erreichen und seitdem keiner signifikante Änderung ihrer Eigenschaften mehr erfahren haben. Bereits 1947 sagten Alpher, Herman, Gamov und andere vorher, dass es diese sog. kosmische Hintergrundstrahlung (cosmic microwave background, CMB) geben sollte. Damals sollte das Universum eine Temperatur von ca. 3000K gehabt haben, und dieser Zeitpunkt der “Entkopplung” von Photonen und Atomen soll ca. 400 000 Jahre nach dem Urknall gewesen sein.

Während der Expansion und der damit verbundenen Abkühlung des Universums⁶⁹ sollte auch die Temperatur der kosmischen Hintergrundstrahlung sinken, auf heute ca. 2.7K. Die experimentelle Bestätigung gelang 1964, als Penzias und Wilson Radiosignale aus dem Weltall auffingen und analysierten⁷⁰. Die Daten, geplottet als Funktion der Wellenlänge, ergaben ein perfektes Planck-Spektrum, das ungefähr einer Temperatur von 3K entsprach, s. Abb. 6.16. Das bestätigt die Erwartung, dass die Photonen im thermodynamischen Gleichgewicht und bei der selben Temperatur sind, wie das Universum. Seit den 80er Jahren gab es mehrere Satelliten-Missionen, die CMB-Strahlung mit immer größerer Genauigkeit vermessen haben (COBE 1989-93, WMAP 2001-10, Planck 2009-13)⁷¹. Die Messungen des Planck-Satelliten bestätigten die außergewöhnliche Isotropie der CMB-Strahlung: sie besitzt eine Temperatur von $T = 2.72548 \pm 0.00057\text{K}$, Abweichungen davon treten erst in der 5. Stelle auf⁷² und sind im rechten Teil von Abb. 6.16 gezeigt. Sie deuten auf Materie hin, die die Strahlung auf ihrem Weg zur Erde leicht beeinflusst hat. Die hohe Genauigkeit dieser Messdaten ist ein exzellenter Test für kosmologische Modelle und erlaubt z.B. das Alter des Universums auf $13.799 \pm 0.021\text{Mrd. Jahre}$ und den Zeitpunkt der Entkopplung der Photonen von der Materie auf $377200 \pm 3200\text{ Jahre}$ zu bestimmen.

Damit ist die Plancksche Quantisierungs-Hypothese nicht nur für die Materie im Nanokosmos von zentraler Bedeutung, sondern auch für das Verständnis der Struktur des Universums auf den größten Skalen.

6.5 Aufgaben

1. Bestimmen Sie die Fermienergie und die Fermigeschwindigkeit für die Leitungselektronen in Kupfer.
2. Man untersuche das Ergebnis (6.45) für die Entropie für
 - (a) ein Fermigas bei $T = 0$,
 - (b) ein Fermigas bei niedrigen Temperaturen, $\Theta \lesssim 0.1$

⁶⁸abgesehen von sehr seltenen resonanten Anregungsprozessen

⁶⁹Man geht davon aus, dass dies in guter Näherung ein adiabatischer Prozess war.

⁷⁰Dafür erhielten sie 1978 den Nobelpreis.

⁷¹Für die COBE-Ergebnisse erhielten J. Mather und G. Smooth den Physik-Nobelpreis 2006.

⁷²Damit handelt es sich um die heute am genauesten bestimmte Messgröße der Kosmologie. Details sind in Ref. [Durrer, 2021] zu finden.

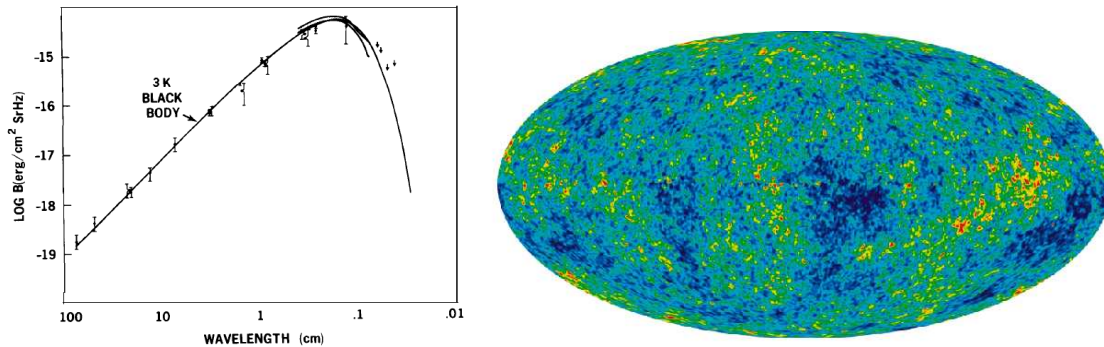


Abbildung 6.16: **Links:** in den 60er Jahren von Penzias und Wilson auf der Erde gemessenes Radiowellen-Spektrum; die Symbole sind die Messdaten, die Linie ein Fit an die Planck-Kurve für $T = 3\text{K}$ (aus dem Nobelvortrag von Wilson, 1978). **Rechts:** CMB-Spektrum des gesamten Himmels, Messung des Planck-Satelliten. Farbkodiert sind die Abweichungen der Temperatur vom Mittelwert in der 5. Stelle, d.h. die CMB-Strahlung besitzt aus allen Richtungen aus dem Universum eine auf 4 Stellen übereinstimmende Temperatur.

- (c) ein Bose-Einstein-Kondensat.
- 3. Man leite die Ausdrücke (6.41) und (6.42) für die Fluktuationen der Besetzungszahlen ab.
- 4. Thermodynamische Eigenschaften von Fermigasen.
 - (a) Berechnen Sie die Zustandsdichte des Elektronengases in einer und zwei Dimensionen.
 - (b) Berechnen Sie die Koeffizienten in Gleichung (6.25) und finden Sie eine Näherung für die stabile Elektronendichte.
 - (c) Berechnen Sie die Fermienergie für ein relativistisches Fermigas. Untersuchen Sie anschließend den ultrarelativistischen Grenzfall.
- 5. Untersuchen Sie das ultrarelativistische Bosegas im eindimensionalen und zweidimensionalen Grenzfall. Untersuchen Sie insbesondere die Möglichkeit von Bose-Einstein-Kondensation.