Quantenmechanik I, WS 2025/26

Prof. Dr. Michael Bonitz

Übungszettel 8 (Abgabe: Montag 8. Dezember. 10:00)

1. **Wiederholung (mündlich)**: *Quantenmechanik im Hilbertraum*

   (a) Geben Sie die Spektraldarstellung eines Operators an. Leiten Sie daraus seine Matrixdarstellung in der Basis seiner Eigenfunktionen ab. Demonstrieren Sie den Übergang zu einer beliebigen anderen Darstellung.

   (b) Erläutern Sie die Eigenschaften einer kontinuierlichen Basis im Hilbertraum.

   (c) Wiederholen Sie die Eigenschaften der Diracschen Delta-Distribution und beweisen Sie diese. Wiederholen Sie die Darstellungen als Grenzwert stetiger Funktionen.

   (d) Erläutern Sie die allgemeine Heisenberg-Unschärfe-Relation.

   (e) Wiederholen Sie den Bahndrehimpuls der klassischen Mechanik, insbesondere die Darstellung in kartesischen Koordinaten.

2. **Aufgaben (35 Punkte)**: *Harmonischer Oszillator. Drehimpulsoperator*

   (a) Ein Teilchen befinde sich im harmonischen Oszillator in einem Superpositionszustand aus Eigenzuständen $|\Psi\rangle = Z^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty} C_n|\psi_n\rangle$, wobei $C_n = e^{-\beta E_n/2}$, $\beta > 0$ gilt. Geben Sie $|\Psi\rangle$ explizit an. Man berechne als Funktion von $x = \beta\hbar\omega$

   i. die Normierungskonstante Z,

   ii. den Erwartungswert des Hamiltonoperators $\hat{H}$

   iii. den Erwartungswert des Teilchenzahloperators $a^\dagger a$

   iv. die Unschärfe (Standard-Abweichung) des Hamiltonoperators

   v. die Unschärfe des Teilchenzahloperators

   im Zustand $|\Psi\rangle$.
   (8 Punkte).

   (b) Man zeige, dass in einem beliebigen kohärenten Zustand des harmonischen Oszillators das Unschärfeprodukt von Orts- und Impulsoperator minimal ist. (10 Punkte)

   (c) Für den Drehimpuls-Operator der Quantenmechanik, $\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}}$, finde man den hermitesch adjungierten, $\hat{\mathbf{L}}^\dagger$ (3 Punkte).

   (d) Man betrachte den Operator $\hat{A} = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{d\phi}$, mit $\phi \in [0, 2\pi]$.

   i. Man löse das Eigenwertproblem von $\hat{A}$. Die Eigenfunktionen sind zu normieren. Welche Eigenwerte sind möglich?

ii. Man gebe die Spektraldarstellung von $\hat{A}$ an.

iii. Man gebe die Matrixelemente von $\hat{A}$ und $\hat{A}^3$ in der Basis der Eigenfunktionen an.

iv. Man zeige, dass die Basis orthonormiert ist.

v. Geben Sie die Vollständigkeitsbedingung für die Basis an.

(6+2+2+3+1 Punkte)