Quantenmechanik I, WS 2025/26

Prof. Dr. Michael Bonitz

Übungszettel 7 (Abgabe: Montag 1.12. 10:00)

1. **Wiederholung (mündlich)**: *Quantenmechanik im Hilbertraum*
   (a) Erläutern Sie die Koordinatendarstellung von Operatoren.
   (b) Wie hängt die Matrixdarstellung eines Operators mit der des hermitesch adjungierten zusammen?
   (c) Formulieren Sie die Definition einer vollständigen Observable. Worin besteht die physikalische Interpretation?
   (d) Formulieren Sie die Eigenschaften einer Basis (vollständiges Orthonormalsystem) im Hilbertraum in der Dirac-Notation.
   (e) Wiederholen Sie die Eigenschaften hermitescher und unitärer Operatoren und beweisen Sie die Sätze 1-5 (Skript).

2. **Aufgaben (30 Punkte)**: *Harmonischer Oszillator*
   (a) Berechnen Sie die Unschärfe des Hamiltonoperators, $\langle \Delta \hat{H}^2 \rangle$, i) in einem Oszillatoreigenzustand, ψ_n, und ii) in einem Superpositionszustand $\Psi(x) = \sum_{n=1}^{3} C_n \psi_n(x)$, Ψ sei auf 1 normiert. (6 Punkte)
   (b) Lösen Sie das Eigenwertproblem des zweidimensionalen harmonischen Oszillators mit dem Potential $V(x,y) = m\omega^2(x^2+y^2)/2$. Man zeige, dass ein Produktansatz $\Psi(x,y) = \psi(x)\psi(y)$, wobei ψ die Lösungen des 1D-Oszillators sind, die korrekte Lösung liefert. Untersuchen Sie die Entartung der Energie-Eigenwerte. (12 Punkte).
   (c) Man zeige, dass die Zeitentwicklung des Erwartungswertes des Impulsoperators in einem kohärenten Zustand, $\psi_\alpha(x)$, mit der Zeitentwicklung des Impulses eines klassischen Teilchens im Oszillatorpotential übereinstimmt. (6 Punkte)
   (d) Man berechne (in der Basis der Oszillatorfunktionen) die Matrixelemente $\hat{a}_{mn}$, $\hat{a}^\dagger_{mn}$ und $\hat{N}_{mn}$. Hinweis: das Matrixelement eines Operators $\hat{A}$ ist definiert als $A_{nm} = \int dx\, \psi_n^*(x)\hat{A}\psi_m(x)$. (6 Punkte)

3. **Zusatzaufgabe** (zum 8.12.): *1D Harmonischer Oszillator im elektrischen Feld.* Ein Elektron im Harmonischen Oszillator befinde sich im ersten angeregten Zustand. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird langsam ein räumlich homogenes konstantes elektrisches Feld der Feldstärke $\mathcal{E}$ eingeschaltet. Man finde einen Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit P_{1n} dafür, dass sich das Elektron danach im n-ten angeregten Zustand (mit Feld) befindet. Man berechne explizit die Abhängigkeiten $P_{10}(\mathcal{E})$ und $P_{11}(\mathcal{E})$. Hinweis: es ist nur das stationäre Problem zu lösen. Man verwende die Dipol-Näherung für die potentielle Energie des Elektrons im Feld.