Quantenmechanik I, WS 2025/26

Prof. Dr. Michael Bonitz

Übungszettel 6 (Abgabe: Montag 24.11. 10:00)

1. **Wiederholung (mündlich)**: *Harmonischer Oszillator.*
   (a) Diskutieren Sie die Lösung der Schrödingergleichung für den eindimensionalen harmonischen Oszillator. Erläutern Sie Sommerfelds Polynommethode.
   (b) Wiederholen Sie Definition und Eigenschaften der Hermiteschen Polynome.
   (c) Erläutern Sie die Lösung der Schrödingergleichung des harmonischen Oszillators mit Hilfe der Leiteroperatoren.
   (d) Was sind kohärente Zustände (Glauberzustände)? Geben Sie Beispiele für ihre Realisierung an.

2. **Aufgaben (35 Punkte)**: *Harmonischer Oszillator*
   (a) Beweisen Sie, dass für die Hermite-Polynome gilt

$$H_n'(u) = 2nH_{n-1}(u)\,, \tag{1}$$

$$uH_n(u) = nH_{n-1}(u) + \frac{1}{2}H_{n+1}(u)\,. \tag{2}$$

   (4 Punkte)
   (b) Berechnen Sie mit Hilfe der Rekurrenzformel die Eigenfunktionen $\psi_3(x), \psi_4(x)$ und $\psi_5(x)$. Vergleichen Sie das Ergebnis mit Hilfe der erzeugenden Funktion der Hermite-Polynome (Skript, Eigenschaft a.). (9 Punkte)
   (c) Beweisen Sie, dass die Eigenfunktionen des Harmonischen Oszillators ψ_n und ψ_m mit $m \neq n$ orthogonal zu einander sind. (4 Punkte)
   (d) Man bestimme für ein Teilchen im Grundzustand die Aufenthaltswahrscheinlichkeit außerhalb des klassisch erlaubten Bereiches. Anschließend finde man diese Wahrscheinlichkeit für beliebige n und untersuche den Grenzwert $n \to \infty$. *Hinweis:* man finde zuerst die klassischen Umkehrpunkte für $E = E_n$ und anschließend die Aufenthaltswahrscheinlichkeit *zwischen* diesen Punkten (10 Punkte).
   (e) Finden Sie die dipolerlaubten Übergänge des Oszillators. Hinweis: es sind die (Übergangs-)Matrixelemente des Dipoloperators $\hat{d} = e\hat{x}$ [vgl. klassisches Dipolmoment, s. Elektrodynamik], zwischen zwei Eigenzuständen mit den Quantenzahlen n und m zu berechnen, die definiert sind als

$$d_{mn} = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi_m^*(x)\, \hat{d}\, \psi_n(x). \tag{3}$$

   Als dipolerlaubt bezeichnet man Übergänge, für die $d_{mn} \neq 0$ ist. Welche Werte nimmt d_{mn} an? (Hinweis: man berechne zunächst die Matrixelemente der Operatoren $\hat{a}$ und $\hat{a}^\dagger$), (8 Punkte).