

Quantenmechanik I, WS 2025/26

Prof. Dr. Michael Bonitz

Übungszettel 4 (Abgabe: Montag 10.11. 10:00)

1. Wiederholung (mündlich): *Schrödingergleichung, 1d-Kastenpotential*

- (a) Definieren Sie die Breite der Wahrscheinlichkeitsdichte eines Mikroteilchens. Erläutern Sie den Zusammenhang zwischen der Breite im Ortsraum und im Impulsraum.
- (b) Diskutieren Sie die Lösung der Schrödingergleichung für den Potentialtopf mit unendlich hohen Wänden.
- (c) Diskutieren Sie die Lösung der Schrödingergleichung und die Stetigkeitsanforderungen an die Wellenfunktion für ein Teilchen in einem stückweise stetigen Potential (z.B. Potential bestehend aus n Kästen endlicher Höhe/Tiefe).

2. Aufgaben (20 Punkte): *Zeitabhängige und stationäre Schrödingergleichung*

- (a) Ein freies Teilchen befinde sich in einem Zustand, der eine Überlagerung von Funktionen, $\tilde{\psi}(k) = C e^{-\Gamma|k-k_0|-ikx_0}$, mit verschiedenen kontinuierlichen k darstellt, wobei C die Normierungskonstante ist. Hier bezeichnet k die Wellenzahl (rell, eindimensionales Problem). Die Wellenfunktion im Ortsraum ("Wellenpaket") ergibt sich durch Fourier-Transformation

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \tilde{\psi}(k) e^{ikx}. \quad (1)$$

- i. Man bestimme die Normierungskonstant C .
- ii. Man berechne die Wellenfunktion $\psi(x)$ und diskutiere den Zusammenhang zwischen dem Parameter Γ und der Breite des Wellenpakets. Für letztere benutze man die Standardabweichung σ_x . Hinweis: als eine grobe Abschätzung kann für σ_x auch FWHM benutzt werden, d.h. die Breite des Peaks von $|\psi(x)|^2$ auf halber Höhe.
- iii. Man zeichne die Realteile der Funktionen $\psi(x)$ und $\tilde{\psi}(k)$.
- iv. Man berechne die Erwartungswerte im k -Raum, $\langle k \rangle_k$ und $\langle k^2 \rangle_k$, wobei $\langle \dots \rangle_k$ definiert ist durch $\langle A \rangle_k = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \tilde{\psi}^*(k) A(k) \tilde{\psi}(k)$.
- v. Man vergleiche die Standardabweichung σ_k , definiert durch:

$$\sigma_k = \sqrt{\langle k^2 \rangle_k - [\langle k \rangle_k]^2} \quad (2)$$

mit der Breite des Wellenpakets, die in Punkt (ii) berechnet wurde.

- vi. Untersuchen Sie die Abhängigkeit des Produktes $\sigma_x \sigma_k$ von Γ .

(Punkte: 12)

- (b) Zeigen Sie, dass die Schrödingergleichung für ein freies Teilchen die Energie erhält. Dazu betrachte man die lokale Energiedichte, $\epsilon(\mathbf{r}, t) = \psi^*(\mathbf{r}, t) \hat{H} \psi(\mathbf{r}, t)$, leite für sie eine Bilanzgleichung der Form

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_\epsilon = 0, \quad (3)$$

ab und finde einen Ausdruck für die Energiestromdichte $\mathbf{j}_\epsilon$. Für die Energieerhaltung untersuche man die Gesamtenergie, d.h. das Integral von ϵ über den ganzen Raum. (8 Punkte).

- (c) **Zusatzaufgabe: Quantenmechanik nach Bohm und Madelung.**

Für ein quantenmechanisches Teilchen in einem Potential $V(\mathbf{r}, t)$ zeige man, dass sich die Schrödingergleichung auf die Form hydrodynamischer Gleichungen für Dichte n und Impuls $\mathbf{p}$ bringen lässt und vergleiche mit den Gleichungen der klassischen Hydrodynamik.

Hinweis: Man verwende für die Wellenfunktion den Ansatz

$$\psi(\mathbf{r}, t) = A(\mathbf{r}, t) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S(\mathbf{r}, t) \right\}, \quad A, S \in \mathcal{R}, \quad (4)$$

und identifiziere $n = A^2$, sowie $\mathbf{p} = \nabla S$.