

Quantenmechanik I, WS 2025/26

Prof. Dr. Michael Bonitz

Übungszettel 13 (Abgabe: Montag 26.1. 10:00)

1. Wiederholung (mündlich): *Spindynamik. Störungstheorie*

- (a) Erläutern Sie die quantenmechanische Beschreibung der Spindynamik. Erläutern Sie das Phänomen der Spinresonanz.
- (b) Erläutern Sie die Idee der stationären Störungstheorie und leiten Sie die Gleichungen für die erste Korrektur zur Energie bzw. Wellenfunktion, $E_n^{(1)}$ und $\psi_n^{(1)}$, ab. Diskutieren Sie die physikalische Information dieser Korrekturen sowie ihren Gültigkeitsbereich.
- (c) Erläutern Sie das Vorgehen bei der stationären Störungstheorie für entartete Eigenwerte.

2. Aufgaben (25 Punkte): *Spin-Dynamik. Störungstheorie*

- (a) Ist ein Elektron (zum Beispiel in einem Kristallgitter) an einem bestimmten Ort lokalisiert, so kann sein Spin s oft als einziger Freiheitsgrad angesehen werden. Bei Anwesenheit eines Magnetfelds $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ lautet dann der Hamiltonoperator $\hat{H} = -\hat{\mu} \cdot \mathbf{B} = 2\omega_L \hat{s}_z$. Dabei ist $\omega_L = g\mu_B B/\hbar$ die Larmorfrequenz. Berechnen Sie den zeitabhängigen Erwartungswert $\langle \hat{\mathbf{s}} \rangle_t = \langle \chi(t) | \hat{\mathbf{s}} | \chi(t) \rangle$ für die Anfangsbedingungen $\langle \hat{s}_x \rangle_{t=0} = \hbar/2$ und $\langle \hat{s}_y \rangle_{t=0} = \langle \hat{s}_z \rangle_{t=0} = 0$. Interpretieren Sie das Ergebnis. Mit welcher Wahrscheinlichkeit misst man zur Zeit t die Spinprojektion $\hbar/2$ in x -Richtung?

Hinweis: Man benutze die allgemeine Lösung der Pauli-Gleichung für den Spinor:

$$\chi_\sigma(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} \chi_\sigma(t=0) \quad (1)$$

(10 Punkte)

- (b) Man untersuche mit Hilfe der Störungstheorie die Wechselwirkungsenergie W zweier Wasserstoffatome, die sich im Abstand $R \gg a_B$ befinden. Die Protonen sollen wie Punktteilchen behandelt werden.
 - i. Man formuliere W in erster Ordnung Störungstheorie für den Fall beliebiger Atomzustände α_1 und α_2 ($\alpha = n, l, m$)
 - ii. Man berechne die Wechselwirkungsenergie für den Fall, dass sich beide Atome in unterschiedlichen Zuständen befinden.
 - iii. Man formuliere die Wechselwirkungs-Energie in zweiter Ordnung Störungstheorie für den Fall beliebiger Atomzustände.

- iv. Man untersuche das Vorzeichen und die R -Abhängigkeit der Wechselwirkungsenergie für die Fälle, dass sich beide Atome a) im Grundzustand und b) im $10s$ -Zustand befinden.

Hinweis: wegen des großen Abstandes lässt sich die Wechselwirkung als die zweier Dipole nähern. Außerdem kann die Wellenfunktion der beiden Elektronen durch ein Produkt der Wellenfunktionen der einzelnen Atome genähert und der Spin (Austausch) vernachlässigt werden.
(15 Punkte)