

Kapitel 2

Grundlagen der Quantenmechanik

2.1 Doppelspaltexperiment mit klassischen Teilchen

Nehmen wir eine Quelle, die klassische Teilchen in zufälliger Richtung aussendet. Diese gehen durch einen Doppelspalt und werden auf einem dahinter liegenden Detektor registriert. Wir führen N unabhängige Schüsse durch. Wir untersuchen drei Versuchsreihen mit:

1. Spalt 2 ist geschlossen. Spalt 1 ist offen.
2. Spalt 1 ist geschlossen. Spalt 2 ist offen.
3. beide Spalte sind geöffnet.

In untenstehender Abbildung ist der Versuchsaufbau sowie die gemessene Auftreff-Häufigkeitsverteilung skizziert.

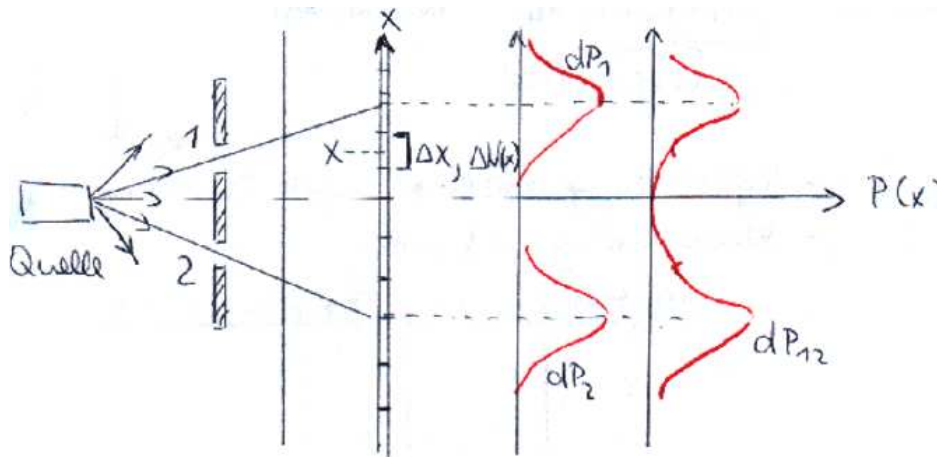


Abbildung 2.1: Schema des Doppelspaltexperiments mit klassischen Teilchen. dP_1 ist die Auftreffwahrscheinlichkeit (Mittel über $N \rightarrow \infty$ Versuche) bei geschlossenem Spalt 2, dP_2 das entsprechende Resultat bei geschlossenem Spalt 1. Wenn beide Spalte geöffnet sind, ergibt sich dP_{12} .

Das Einzelereignis (Auftreff-Ort x) ist nicht vorhersagbar. Aus der vom Detektor gemessenen absoluten Auftreff-Häufigkeit $\Delta N(x)$ gewinnen wir eine Wahrscheinlichkeitsverteilung durch Erhöhung der Zahl der Durchführungen N des Versuchs und Mittelung über die Messwerte. Es ergibt sich für die drei Versuchsdurchführungen:

1. Die Wahrscheinlichkeit, dass das Objekt am Ort x auftritt und durch den Spalt 1 gegangen ist, beträgt:

$$dP_1(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\Delta N_1(x)}{N}$$

2. Die Wahrscheinlichkeit, dass das Objekt am Ort x auftritt und durch den Spalt 2 gegangen ist, beträgt:

$$dP_2(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\Delta N_2(x)}{N}$$

3. In diesem Versuch geht das Objekt **entweder** durch Spalt 1 oder durch Spalt 2. Das Experiment zeigt:

$$\begin{aligned} dP_{1,2} &= dP_1(x) + dP_2(x) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\Delta N_1(x) + \Delta N_2(x)}{N} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Wir halten also fest, dass die Gesamtwahrscheinlichkeit für klassische Teilchen die Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten ist. Außerdem ist die relative Auftreff-Häufigkeit (Wahrscheinlichkeit) vorhersagbar. Dies macht Wahrscheinlichkeitstheorie zur Beschreibung nötig.

2.2 Einschub: Wahrscheinlichkeits-Theorie

A. Allgemeiner diskreter stochastischer Prozess

Sei unser System charakterisiert durch die zufälligen möglichen Ereignisse $x_1, \dots, x_k$; man nennt $x = \{x_1, \dots, x_k\}$ auch das *Ereignisfeld*. Nach dem Beispiel von oben registrieren wir jedes Ereignis in einer eigenen Spalte x_1 bis x_k vorstellen. Eine Messung ist nun eine wiederholte Registrierung von Einzelereignissen mit anschließender Mittelung

Nr. n der Messung	x_1	x_2	...	x_k
1		x		
2			x	
$\vdots$				
n				
$\vdots$				
N	x			
Summe	N_1	N_2		N_k

Tabelle 2.1: Messtabelle für das Ereignisfeld x (k verschiedene Möglichkeiten) bei N unabhängigen Wiederholungen.

Offensichtlich gilt folgende Normierung:

$$N = \sum_{i=1}^k N_i$$

Die Wahrscheinlichkeit p_i des i -ten Ereignisses erhält man durch:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_i}{N} = p_i \quad (2.2)$$

Jetzt folgt die *Normierung* der Wahrscheinlichkeiten:

$$\sum_{i=1}^k p_i = 1, \quad (2.3)$$

wobei für jedes $1 \leq i \leq k$ gilt:

$$0 \leq p_i \leq 1 \quad (2.4)$$

Hierbei nennt man $p = 0$ ein unmögliches Ereignis und $p = 1$ ein sicheres Ereignis.

Mittelwerte physikalischer Größen: Nehmen wir an, jedes Ereignis x_i ist mit der Messung einer Energie E_i verknüpft. Der Mittelwert (diese Größe wird i.a. als “Erwartungswert” bezeichnet) für die Energie ist dann:

$$\langle E \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N E_n.$$

Dabei tritt jedes der k Ereignisse i.a. mehrmals (N_i -mal) auf. Sortieren wir dies nach den möglichen verschiedenen Ereignissen um, so erhalten wir:

$$\langle E \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k E_i N_i = \sum_{i=1}^k E_i \frac{N_i}{N} \quad (2.5)$$

Für den Grenzwert $N \rightarrow \infty$ erhalten wir dann mit (2.2):

$$\langle E \rangle = \sum_{i=1}^k E_i p_i \quad (2.6)$$

Der Satz der Wahrscheinlichkeiten $\{p_i\}$ genügt also zur Berechnung beliebiger Erwartungswerte des stochastischen Prozesses.

B. Kontinuierliches Ereignisfeld

Nun betrachten wir nicht mehr endlich viele diskrete Ereignisse, sondern eine kontinuierliche Verteilung. In obigem Beispiel könnte man sagen, dass es immer mehr immer kleinere Spalte gibt, wobei die Gesamtlänge L unverändert bleibt.

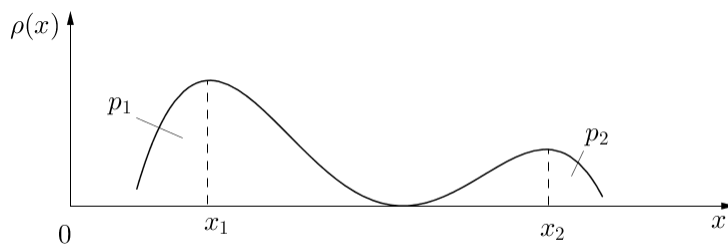


Abbildung 2.2: Kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsverteilung – die Wahrscheinlichkeitsdichte – als Grenzwert einer diskreten Verteilung. Die Fläche unter der Kurve ergibt die Gesamtwahrscheinlichkeit aller Ereignisse – also 1. Im diskreten Fall ist dies die Summe aller p_i .

Mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(x)$ wird die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, einen Messwert im Intervall $[x_1, x_2]$ zu registrieren:

$$P(x_1 \leq x \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) dx .$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass Ereignisse im Intervall $[0, x]$ eintreten, ist dann:

$$P(x) = \int_0^x \rho(x') dx' . \quad (2.7)$$

Da ρ nichtnegativ ist, ist $P(x)$ monoton wachsend. Differenziert man Glg. (2.7) nach der oberen Grenze, so erhält man eine alternative Definition der Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$\rho(x) = \frac{dP(x)}{dx} .$$

Ist die Zufallsgröße x verteilt von 0 bis L , so erfolgt die Normierung über:

$$1 = \int_0^L dP(x) = \int_0^L \rho(x) dx .$$

Der Erwartungswert berechnet sich analog zur Summe im diskreten Fall, vgl. (2.5), nun über das Integral zu:

$$\langle E \rangle = \int_0^L E(x) \rho(x) dx \quad (2.8)$$

C. Abhängige Einzelereignisse

Wir betrachten jetzt eine allgemeinere Situation nicht unabhängiger Ereignisse. Stellen wir uns zwei überlappende Elemente auf dem Detektor vor:

$$1 : x \in [x_a, x_b]$$

$$2 : x \in [x_c, x_d]$$

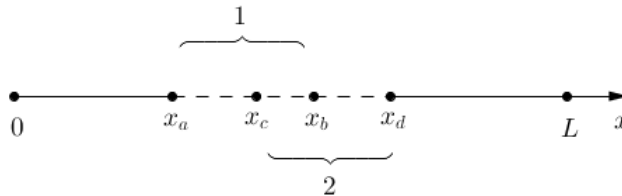


Abbildung 2.3: Zwei sich überlappende Ereignisse (z.B. Detektor-Elemente)

Die Wahrscheinlichkeit, dass das Objekt auf Element 1 trifft, ist:

$$P^{(1)} = P(x_a \leq x \leq x_b),$$

sowie auf Element 2:

$$P^{(2)} = P(x_c \leq x_d).$$

Die Wahrscheinlichkeit $P^{(1,2)}$, dass das Objekt entweder auf Element 1 oder Element 2 trifft, ist nun:

$$\begin{aligned} P^{(1,2)} &= P^{(1)} + P^{(2)} - P(1 \cup 2) \\ &= P^{(1)} + P^{(2)} - P(x_c \leq x \leq x_b) \end{aligned}$$

Die Überlapp-Menge der Ereignisse ist:

$$x_c \leq x \leq x_b$$

Diese Doppelzählung muss in $P^{(1,2)}$ berücksichtigt werden.

Frage: Wie ändert sich die Normierungsbedingung?

2.3 Doppelspaltexperiment mit Wellen

Nun betrachten wir das Doppelspalt-Experiment, welches wir zuvor für klassische Makroteilchen behandelt haben, für elektromagnetische Wellen¹. Der Versuchsaufbau ist wieder derselbe, s. Abb. 2.4.

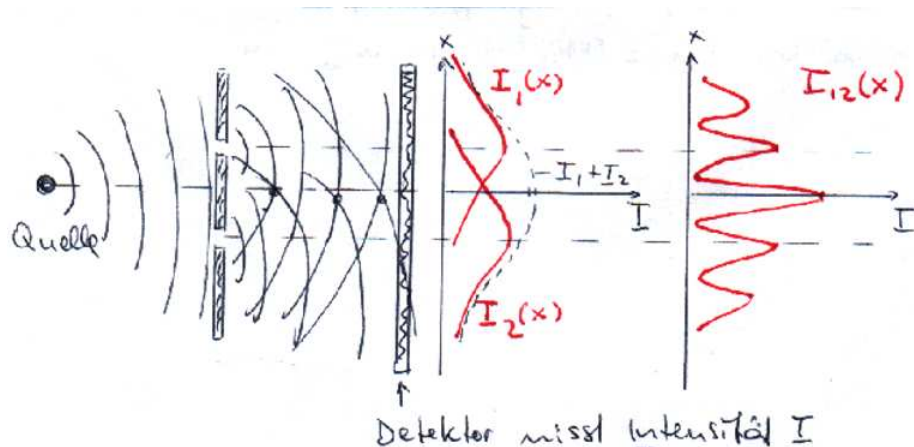


Abbildung 2.4: Doppelspaltexperiment mit Wellen und die gemessenen ortsabhängigen Intensitäten (schematisch)

Wir betrachten, wie oben in der Abbildung schon angedeutet, wieder:

1. Spalt 2 ist geschlossen. Spalt 1 ist offen. Wir messen die Intensität $I_1(x)$.
2. Spalt 1 ist geschlossen. Spalt 2 ist offen. Wir messen die Intensität $I_2(x)$.
3. Die Spalte 1 **und** 2 sind geöffnet. Offensichtlich gilt hier keine Additivität:

$$I_{1,2} \neq I_1(x) + I_2(x),$$

und die Intensität $I_{1,2}$ kann an einigen Raumpunkten sogar 0 werden, selbst wenn dort beide Einzelintensitäten ungleich Null sind. Man beobachtet hier also Interferenz.

¹Für mechanische Wellen bzw. Wasserwellen lässt sich eine analoge Betrachtung formulieren.

Die Erklärung der Elektrodynamik wollen wir an dieser Stelle noch einmal besprechen. Die Maxwell-Gleichungen im Vakuum besitzen eine Wellenlösung für das elektrische (und analog für das magnetische) Feld $\underline{E}(\underline{r}, t)$. Außerdem sind die Maxwell-Gleichungen linear. Also gilt das Superpositionsprinzip für ihre Lösungen. Sind also $E_1(x)$ und $E_2(x)$ Lösungen der Maxwell-Gleichungen, so ist auch

$$E_{1,2}(x) = E_1(x) + E_2(x)$$

Lösung der Maxwell-Gleichungen. Die Koeffizienten der Linearkombination wurden hier zur Vereinfachung gleich 1 gesetzt.

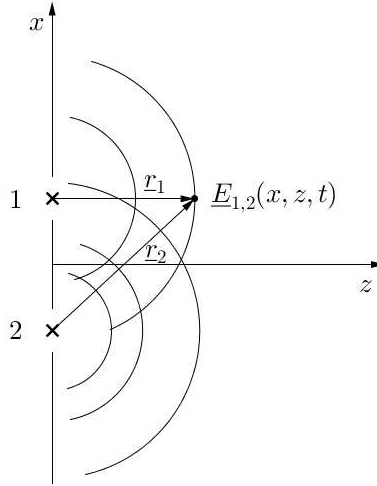


Abbildung 2.5: Superposition und Interferenz zweier Kreiswellen

Setzen wir an

$$\begin{aligned}\underline{E}_1(x, z, t) &= \underline{E}_{10} e^{i\varphi_1(x, z, t)}, \\ \underline{E}_2(x, z, t) &= \underline{E}_{20} e^{i\varphi_2(x, z, t)},\end{aligned}$$

mit den Amplituden $E_{10}, E_{20} \in \mathbb{C}$ und den reellen Phasen φ_1 und φ_2 , so gilt für das elektrische Feld bei (x, z, t) die Superposition:

$$\underline{E}_{1,2}(x, z, t) = \underline{E}_1(x, z, t) + \underline{E}_2(x, z, t).$$

Man beachte, dass hier keine Interferenz ablesbar ist. Die physikalische Messgröße ist aber nicht die Feldstärke, sondern die Intensität I , die proportional zu $|E|^2$ ist. Berechnen wir diese², so gilt, mit der Abkürzung $\Delta\varphi = \varphi_1(x, z, t) - \varphi_2(x, z, t)$:

$$\begin{aligned}\alpha \cdot I_{1,2}(x, z, t) &= (\underline{E}_1 + \underline{E}_2)(\underline{E}_1 + \underline{E}_2)^* \\ &= |\underline{E}_1|^2 + |\underline{E}_2|^2 + \underline{E}_1 \cdot \underline{E}_2^* + \underline{E}_1^* \cdot \underline{E}_2 \\ &= |E_{10}|^2 + |E_{20}|^2 + E_{10} E_{20}^* e^{i\Delta\varphi} + E_{20} E_{10}^* e^{-i\Delta\varphi} \\ &= |E_{10}|^2 + |E_{20}|^2 + 2 \cdot \Re [E_{10} E_{20}^* e^{i\Delta\varphi}] \\ &= \underbrace{\alpha \cdot (I_1 + I_2)}_{\text{klass. Teilchen}} + \underbrace{2|E_{10}| \cdot |E_{20}| \cdot \cos \Delta\varphi}_{\text{Interferenzterm}}.\end{aligned}\tag{2.9}$$

Man erkennt, dass die Intensität Maxima hat für³ $\Delta\varphi = n \cdot \pi$, wobei n gerade ist (Gangunterschied von Vielfachen der Wellenlänge). Minima der Intensität findet man hingegen für

²Der Proportionalitätsfaktor ist im Vakuum im CGS-System $\alpha = \frac{4\pi}{c}$ und im SI-System $\alpha = \frac{2}{\epsilon_0 c}$

³Das gefundene Ergebnis gilt für reelle Amplituden E_{10} und E_{20} . Für komplexe Amplituden ist die Phasendifferenz durch die Argumente von E_{10} und E_{20} zu modifizieren.