

Das Minimum der Gesamtenergie (kinetische plus potentielle) entspricht also nicht dem Zustand mit $r \rightarrow 0$ (bzw. $n \rightarrow \infty$), und damit nicht dem Kollaps. Die Quantennatur der Elektronen und ihre Fermistatistik sichern also die Stabilität unseres Universums.

Bemerkung: Die oben gezeigte räumliche Verteilung zweier Teilchen ist natürlich nur qualitativ zu verstehen, zumal wir nicht definiert haben, wie die Größe $\rho(r)$ überhaupt berechnet wird. Wir werden in Kürze sehen, dass es sich dabei um die Aufenthaltswahrscheinlichkeit handelt, die aus der Wellenfunktion folgt. Während bei großen Abständen, vgl. Abb. 1.5, die Gesamtwahrscheinlichkeit die Summe der Wahrscheinlichkeiten ist, jeweils nur eines dieser Teilchen zu sehen, ist das bei geringen Abständen [Abb. 1.6] im allgemeinen nicht der Fall. Wie wir sehen werden, kann es hier zu Interferenzeffekten kommen. Darüber hinaus führen Wechselwirkung und Spinstatistik (Austausch) auch dazu, dass beide Teilchen nicht von einander unabhängig sind und streng genommen, durch eine Zweiteilchen-Wellenfunktion zu beschreiben sind. Diese wechselseitige Beeinflussung führt auf die Phänomene der *Quantenkorrelationen und Verschränkung* (Englisch “*entanglement*”)³.

1.2 Grundgleichungen der klassischen Theorie der Teilchen und Felder

Ende des 19. Jahrhunderts: Man dachte um 1875, das “Gebäude” der Physik wäre vollendet und abgeschlossen [Bonitz, 2008]. Eine vollständige Beschreibung makroskopischer Teilchen und Felder würde durch die Newtonsche bzw. Hamiltonsche Mechanik und die Maxwell-Gleichungen gewährleistet.

Erinnerung: Betrachten wir ein System aus N klassischen Teilchen. Dann ist der Zustand eindeutig bestimmt durch einen $6N$ -dimensionalen Phasenraumpunkt $\Gamma(p, q)$. Hierbei gelte:

$$\begin{aligned} p &= \{\underline{p}_1, \dots, \underline{p}_N\}, \\ q &= \{\underline{q}_1, \dots, \underline{q}_N\}. \end{aligned}$$

Dann wird die Dynamik durch die Hamilton-Funktion bestimmt – die Summe aus kinetischer und potentieller Energie,

$$H_N = T_N + U_N. \quad (1.2)$$

Die kinetische Energie in einem Vielteilchensystem berechnet sich zu:

$$T_N = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m_i},$$

und die potentielle Energie setzt sich im allgemeinen zusammen aus einem externen Potential-Beitrag (I) und der Paar-Wechselwirkungsenergie (II).

$$U_N = \underbrace{\sum_{i=1}^N V_i}_{\text{(I)}} + \underbrace{\sum_{1 \leq i < j \leq N} U_{ij}}_{\text{(II)}}.$$

³Für Experimente zum Nachweis der Verschränkung von Photonen erhielten Alain Aspect, John Clauser und Anton Zeilinger den Physik-Nobelpreis 2022.

Die Zeitentwicklung wird durch die Trajektorie im Phasenraum bestimmt.

$$\begin{aligned}\dot{\underline{p}}_k(t) &= -\frac{\partial H_N}{\partial \underline{q}_k} \\ \dot{\underline{q}}_k(t) &= \frac{\partial H_N}{\partial \underline{p}_k}\end{aligned}\quad (1.3)$$

für $k = 1, \dots, N$ mit den Anfangsbedingungen $\Gamma_0(p_0, q_0)$:

$$\begin{aligned}p_k(0) &= p_{k0} \\ q_k(0) &= q_{k0}\end{aligned}$$

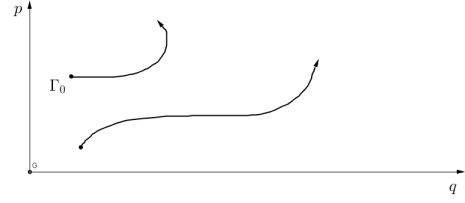


Abbildung 1.7: Trajektorien im Phasenraum, zur Vereinfachung ist nur eine Dimension gezeigt.

Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz der klassischen Mechanik besagt eine strenge Determiniertheit/Eindeutigkeit der Lösung bei (exakt) vorgegebenen Anfangsbedingungen Γ_0 , für jede gegebene Funktion H_N . Eine anschauliche geometrische Interpretation ist eine (unendlich dünne) Trajektorie in Γ_{6N} . Es ist eine gleichzeitige Messung von $\underline{q}$ und $\underline{p}$ (d.h. aller q_i und p_i) möglich. Die Trajektorie liefert die komplette Information. Dabei gehen wir davon aus, dass ein Makroteilchen durch ein Messgerät beliebig wenig beeinflusst wird (bei geschickter Messung), so dass die Messgröße („Observable“) nur durch das Objekt selbst bestimmt wird.

Kommen wir nun zu den Feldern. Für die Felder sind die Bewegungsgleichungen die Maxwell-Gleichungen, welche im CGS-System wie folgt lauten:

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \underline{E} &= 4\pi\rho & \operatorname{div} \underline{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \underline{E} &= -\frac{1}{c}\dot{\underline{B}} & \operatorname{rot} \underline{B} &= \frac{4\pi}{c}\underline{j} + \frac{1}{c}\dot{\underline{E}}\end{aligned}\quad (1.4)$$

Diese sind lösbar mit den gegebenen Anfangsbedingungen $\underline{E}(t=0)$ und $\underline{B}(t=0)$ für alle $\underline{r}$. Außerdem benötigen wir für die Lösung noch die Strom- und Ladungsdichte, die die (Punkt-)Ladungen produzieren,

$$\begin{aligned}\rho(\underline{r}, t) &= \sum_{i=1}^N q_i \delta[\underline{r} - \underline{r}_i(t)], \\ \underline{j}(\underline{r}, t) &= \sum_{i=1}^N q_i \underline{v}_i \delta[\underline{r} - \underline{r}_i(t)].\end{aligned}$$

Die Lösungen der Maxwellgleichungen sind also an die Teilchendynamik gekoppelt. Die Felder wiederum beeinflussen die Teilchendynamik, da sie über die Lorentzkraft in die Hamilton-Gleichungen eingehen. Wir haben damit ein geschlossenes Gleichungssystem aus (1.3) und (1.4). Also ist der Zustand von Teilchen und Feld für alle Zeiten t vorhersagbar.

Diese Beschreibung im Rahmen der klassischen Mechanik und Elektrodynamik war überaus erfolgreich und erklärte (fast) alle experimentellen Befunde. Es gab am Ende des 19. Jahrhunderts – nach Ansicht der damaligen Wissenschaftler – nur einige wenige Beobachtungen, die noch nicht geklärt waren. Aber man ging damals davon aus, dass diese Probleme in kurzer Zeit gelöst sein würden, zumal es sich um „Randprobleme“ handelte⁴. Dies erwies sich als Trugschluss, wie wir im Folgenden sehen werden.

⁴Eines dieser „Randprobleme“ haben wir bereits in der Elektrodynamik kennengelernt: die Strahlung bewegter Körper. Dieses Phänomen führte zur Speziellen Relativitätstheorie.

1.3 Grenzen der klassischen Physik. Quanteneffekte

1.3.1 Quantennatur des EM Feldes

A) Hohlraumstrahlung: Als Modell eines schwarzen Körpers nehmen wir ein Volumen V mit ideal reflektierenden Wänden. Die elektromagnetische Strahlung wird also total reflektiert („schwarzer Körper“)⁵. In diesem Volumen gebe es keine Ladungen. V enthält eine vorgegebene Strahlungsenergie W_{el} und ist im thermodynamischen Gleichgewicht mit der Temperatur T . Es stellt sich nun die Frage nach der Energie-Verteilung über die Frequenzen $\rho(\omega, T)$.

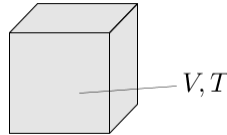


Abbildung 1.8: Modell eines schwarzen Körpers. Im Inneren befindet sich elektromagnetische Strahlung verschiedener Frequenzen (stehende Wellen), die mit den Wänden ins Gleichgewicht kommen.

Die klassische Elektrodynamik liefert für die Feldenergie im Volumen V (wir beschränken uns auf den elektrischen Anteil):

$$W_{el} \propto \int \underline{E}^2 dV \sim V \cdot w_{el}.$$

Hierbei ist $w_{el} = E^2/4\pi$ die Energiedichte (ihre Ortsabhängigkeit ist im Folgenden vernachlässigbar). Diese Energiedichte ergibt sich aus der spektralen Energiedichte $\rho(\omega, T)$ durch Integration über alle Frequenzen:

$$w_{el} = \int_0^{\infty} \rho(\omega, T) d\omega.$$

Die spektrale Energieverteilung bei einer bestimmten Temperatur wurde in Experimenten genau vermessen. Die Messdaten wurden sehr gut durch das klassische Modell von Wien, das eine Maxwell-Verteilung der Atome in den Resonatorwänden annahm, reproduziert, siehe Abb. 1.9. Geringe Abweichungen gab es nur bei großen Wellenlängen, die allerdings mit der Wellenlänge schnell zunahmten. Diese auf den ersten Blick geringen Abweichungen waren der Auslöser für Plancks Entdeckung der Quantisierung der Strahlung, die wir jetzt kurz diskutieren.

Für den Grenzfall großer Frequenzen erwies sich das Modell von *Wien* als korrekt. Für kleine Frequenzen (große Wellenlängen) gilt hingegen das von *Rayleigh und Jeans* gefundene Strahlungsgesetz:

$$\rho(\omega, T) = \begin{cases} \frac{kT}{\pi^2 c^3} \cdot \omega^2 & , \frac{\omega}{T} \text{ klein, Rayleigh/J Jeans, Bereich I} \\ A \cdot e^{-\frac{\alpha\omega}{kT}} & , \frac{\omega}{T} \text{ groß, Wien, Bereich II} \end{cases}$$

Allerdings ist auch klar, dass das Strahlungsgesetz von *Rayleigh/J Jeans* nicht für beliebige Frequenzen korrekt sein konnte. Bei der Berechnung der Energiedichte divergiert nämlich das

⁵Ein Foto eines Experiments findet man an den Tafeln zwischen den Hörsälen im Physikzentrum Kiel.

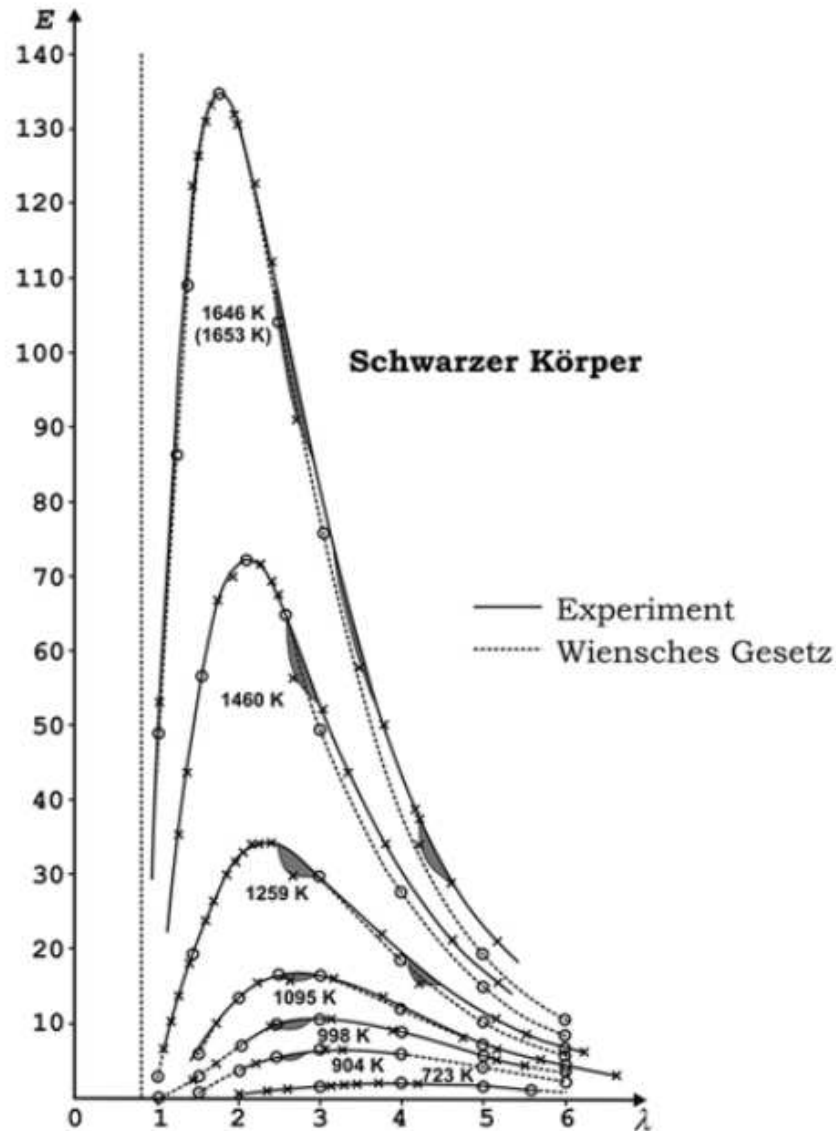


Abbildung 1.9: Präzisionsmessungen der Strahlungsleistung des Schwarzen Körpers für 7 Temperaturen, durch O. Lummer und E. Pringsheim an der Physikalische-Technischen Reichsanstalt in Berlin, 1900, in: Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft 2, 163-180 (1900). Die experimentellen Daten stimmen sehr gut mit dem Wienschen (klassischen) Gesetz überein, bis auf Abweichungen bei großen Wellenlängen. Die Wellenlänge ist in Mikrometern angegeben.

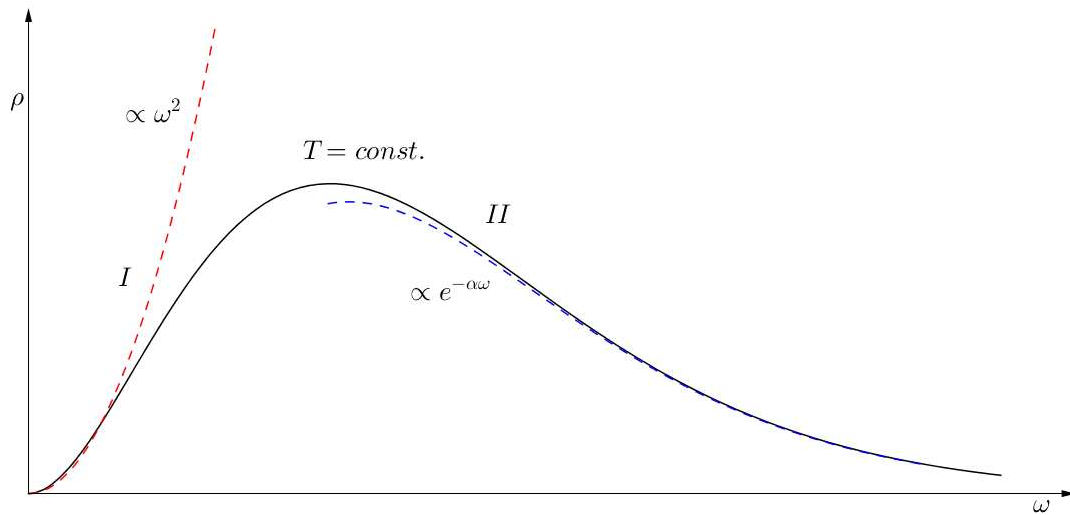


Abbildung 1.10: Gemessene spektrale Energiedichte im Vergleich mit den Modellen von *Rayleigh-Jeans* (I) und *Wien* (II)

Integral,

$$w_{el} \propto \int_0^{\infty} \omega^2 d\omega \rightarrow \infty.$$

Dies bezeichnete man damals mitunter als “Ultraviolett katastrophe”. In vielen Lehrbüchern findet man die Darstellung, dass *Max Planck* nun beide Gesetze kombinierte, um eine für beliebige Frequenzen korrekte Beschreibung der spektralen Energiedichte zu erzielen, was ihn auf seine Strahlungsformel führte.

Das Problem dabei: seine Formel fand Planck Ende 1900, während das Rayleigh-Jeans-Gesetz erst 1905 publiziert wurde. Letzteres und auch die Diskussion über die “Ultraviolett katastrophe” haben also in Plancks Überlegungen überhaupt keine Rolle gespielt. Wir wissen heute aus Aufzeichnungen von Plancks Mitarbeitern, dass H. Rubens Planck Anfang Oktober 1900 über eine andere Formel informierte, s. Glg. (1.7), die Rayleigh 1900 publiziert hatte und die sehr gute Übereinstimmung mit den neuen Messdaten bei großen Wellenlängen lieferte.

Plancks „Interpolationsableitung“: Um das Wiensche Strahlungsgesetz mit Formel (1.7) in Einklang zu bringen, betrachtete *Planck* die Formeln für die innere Energie der Strahlung für eine feste Frequenz ⁶ ω . Das *Wien’sche* Strahlungsgesetz hat dann folgende Form:

$$U(T) = \alpha \cdot e^{-\frac{b}{T}}. \quad (1.5)$$

Hierbei gilt, mit den obigen Bezeichnungen, $b = \frac{\hbar\omega}{k_B}$ und $U = \rho_\omega$. Da Planck am Gleichgewichtszustand des elektromagnetischen Feldes im Resonator interessiert war, untersuchte er die Entropie, $S(U)$. Sie besitzt im Gleichgewicht, in einem abgeschlossenen System, ein Maximum⁷. Nun betrachtete *Planck* das Reziproke der zweiten Ableitung der Entropie nach der Energie U eines Resonators. Diese Größe bezeichnete er mit R ,

$$\frac{1}{\frac{d^2 S}{dU^2}} = R,$$

⁶Details findet man in *Plancks* Originalarbeiten, in seinem Nobel-Vortrag oder in Ref. [Bonitz, 2008].

⁷bei Annahme eines isolierten Systems, im mikrokanische Ensemble, s. Thermodynamik und Statistische Physik.

und sie charakterisiert die Stabilität eines Gleichgewichtszustandes in der Thermodynamik. Im folgenden Abschnitt werden wir die Größe R noch auf ihre physikalische Bedeutung genauer untersuchen. Nun möchte man die Größe R berechnen. Ebenfalls aus der Thermodynamik kennt man die Beziehung für die Temperatur:

$$\frac{1}{T} = \frac{dS}{dU}$$

Diesen Term kann man aus Gleichung (1.5) gewinnen:

$$\begin{aligned} U &= \alpha \cdot e^{-\frac{b}{T}} \\ \ln\left(\frac{U}{\alpha}\right) &= -\frac{b}{T} \\ \frac{dS}{dU} = \frac{1}{T} &= -\frac{1}{b} \ln\left(\frac{U}{\alpha}\right) \end{aligned}$$

R erhält man nun über erneutes Differenzieren nach U :

$$\frac{1}{R} = \frac{d}{dU} \frac{1}{T} = -\frac{1}{b} \frac{1}{U}$$

Hieraus folgt:

$$R = -bU \tag{1.6}$$

Aus der Strahlungsformel von *Rayleigh* (1900), für ein festes ω ,

$$U = c \cdot T, \tag{1.7}$$

kann man nun ebenfalls die Größe R berechnen. Hierbei gilt

$$\frac{1}{T} = \frac{c}{U},$$

woraus folgt:

$$\frac{1}{R} = \frac{d}{dU} \frac{1}{T} = -\frac{c}{U^2}.$$

Also erhält man:

$$R = -\frac{U^2}{c} \tag{1.8}$$

Das Ziel ist es nun, eine spektrale Energieverteilung zu gewinnen, welche für alle Frequenzbereiche gilt. *Planck* kombinierte nun die beiden Ergebnisse für R aus den Gleichungen (1.8) und (1.6) zu einer neuen Größe R für die einheitliche Funktion, die er als Summe beider Fälle wählte:

$$R = -bU - \frac{1}{c}U^2. \tag{1.9}$$

Er tat dies, weil er der Überzeugung war, dass die allgemeinsten Naturgesetze durch die einfachste Mathematik beschrieben werden. Nun kann man aus R wiederum die spektrale Energieverteilung gewinnen.

$$\frac{d}{dU} \frac{1}{T} = \frac{1}{-bU - \frac{1}{c}U^2} \tag{1.10}$$

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{b} \ln\left(1 + \frac{bc}{U}\right) \tag{1.11}$$

$$U(T) = \frac{bc}{e^{\frac{b}{T}} - 1} \tag{1.12}$$

Aufgabe: Man bestimme aus dieser Formel die Entropie.

Bevor wir uns die hergeleitete Strahlungsformel genauer anschauen, betrachten wir noch einmal die Größe R . Thermodynamische Stabilität an der Stelle U_0 erfordert:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dU}\Big|_{U_0} &= 0, \\ \frac{d^2S}{dU^2}\Big|_{U_0} &= \frac{1}{R} < 0,\end{aligned}$$

woraus $R < 0$ folgt.

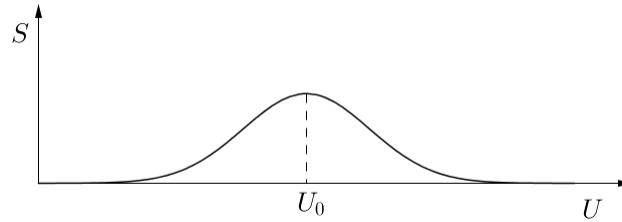


Abbildung 1.11: Der thermodynamisch stabile Zustand entspricht einem Maximum der Entropie und besitzt die innere Energie $U = U_0$, bei fixierten Werten von Temperatur und Volumen.

Darüber hinaus kann man R wie folgt umformulieren:

$$R = \frac{1}{\frac{d}{dU} \frac{1}{T}} = \frac{1}{-\frac{1}{T^2} \frac{dT}{dU}} = -T^2 \frac{dU}{dT} = -T^2 C_V$$

Hierbei ist C_V die Wärmekapazität der Strahlung (V, N fixiert). Die allgemeine Stabilitätsbedingung⁸ besagt $C_V \geq 0$. Damit sind C_V und R wohl definiert. Der Grund für das Funktionieren des additiven Ansatzes von Planck ist, dass verschiedene Freiheitsgrade (die nicht miteinander koppeln) additiv eingehen. Offen bleibt hier allerdings, welche “Freiheitsgrade” durch die beiden Grenzfälle beschrieben werden.

Setzen wir nun in der oben gewonnenen Strahlungsformel unsere eingeführten Größen wieder ein, so erhalten wir folgende Formel:

Die spektrale Energiedichte ist nach Planck gegeben durch:

$$\rho(\omega, T) = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\frac{\hbar \omega}{k_B T}} - 1} \quad (1.13)$$

Dies ist die Bose-Verteilung für Photonen (masselose Bosonen mit Spin $s = 1$).

Dieses Ergebnis veröffentlichte *Planck* im Oktober 1900. Es zeigte sich sofort, dass es mit den experimentellen Daten hervorragend übereinstimmte. *Planck* konnte also davon ausgehen, dass er die richtige Strahlungsformel gefunden hatte. Gleichzeitig war ihm bewusst, dass die “Interpolationsableitung” nicht sehr überzeugend ist, daher begann er, nach einer systematischen Begründung zu suchen, die ihn auf die Hypothesen der Energiequantisierung geführt hat. Macht man nämlich folgende Annahme, so kann man dieses Strahlungsgesetz wesentlich einfacher herleiten: Die Energie einer elektromagnetischen Welle ist in Einheiten von

$$\Delta E = h\nu = \hbar\omega$$

⁸Dies wird in der Thermodynamik gezeigt.

gequantelt (“portioniert”). Insbesondere soll ΔE die minimale Energie der Oszillation sein, die in einer Schwingung “stecken” kann, kleinere Anregungsenergien seien ausgeschlossen, vergleiche [Fließbach, 2008]. Die Zustände der Oszillatoren können sich also nur um ein Vielfaches dieser Energieportion unterscheiden. Nach Boltzmann ist die Wahrscheinlichkeit, genau eine Energie $n\hbar\omega$ mit $n \in \mathbb{N}$ zu haben, im thermodynamischen Gleichgewicht proportional zu $e^{-n\hbar\omega/k_B T} \equiv x^n$, wobei wir die Abkürzung $x = e^{-\hbar\omega/k_B T}$ eingeführt haben. Die Wahrscheinlichkeit aller möglichen Zustände führt dann auf die Summe (die Zustandssumme)

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x},$$

die man direkt aufsummieren kann, da es sich um eine geometrische Reihe handelt. *Plancks* Formel hat in der Tat genau die Struktur der rechten Seite (hierbei gilt stets $|x| < 1$). Die Hypothesen der diskreten Energieportionen stellte *Planck* am 14.12. 1900 auf einer Sitzung der Berliner Physikalischen Gesellschaft vor. Dies war die “Geburtsstunde der Quantentheorie”⁹. Außerdem konnte Planck durch Vergleich seiner Formel mit dem Experiment zwei Konstanten direkt ablesen: die Boltzmannkonstante¹⁰ k_B und die konstante h , die die Dimension einer Wirkung besitzt und heute seinen Namen trägt¹¹:

Das Plancksche elementare Wirkungsquantum hat die Größe:

$$2\pi\hbar = h = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{Ws}^2 \quad (1.14)$$

Max Planck selbst betrachtete die Quantenhypothese zunächst nur als einen mathematischen Trick und lehnte die physikalische Interpretation, dass die elektromagnetische Strahlungsenergie tatsächlich quantisiert ist, noch mehrere Jahre lang ab (dafür sah er keine physikalische Notwendigkeit). Eines der Probleme, das er sah, war folgendes: Betrachten wir bei $r = 0$ eine Punktquelle elektromagnetischer Strahlung der Intensität:

$$I|_{r=0} \propto N \cdot \hbar\omega$$

Nach der klassischen Elektrodynamik nimmt die Intensität mit dem Abstand wie $1/r^2$ ab.

$$I|_r \propto \frac{N \cdot \hbar\omega}{r^2}$$

Hieraus folgt, dass bei hinreichend großem Abstand auf einem kleinen Detektor weniger als ein Photon auftreffen würde (wenn die Intensität homogen im Raum verteilt wäre). Dies ist ein Widerspruch zur Quanten-Hypothese, die impliziert, dass das Photon nicht teilbar ist.

Die einzige sinnvolle Auflösung dieses Widerspruchs besteht darin, den Anspruch einer deterministischen und kontinuierlichen Beschreibung des elektromagnetischen Feldes aufzugeben¹². Das heißt, der Auftreffort eines Photons bei einer Einzelmessung ist zufällig und nicht vorhersehbar. Erst eine statistische Mittelung liefert die räumliche und spektrale Verteilung. Diese ist dann auch reproduzierbar. Das zeigt bereits, dass die Quantenmechanik ganz wesentlich durch

⁹Dieser Begriff wurde von Arnold Sommerfeld eingeführt.

¹⁰Sie wurde von Plank 1899 eingeführt.

¹¹Seit 20.5. 2019 ist die Planck-Konstante Teil des neuen internationalen Einheitensystems und ersetzt insbesondere das bisherige Urkilogramm. Der Wert wurde festgelegt auf $h = 2\pi\hbar = 6,62607015 \cdot 10^{-34} \text{Ws}^2$.

¹²Der mathematische Apparat dafür wird in der Quantenelektrodynamik und in der Quantenfeldtheorie entwickelt, s. unten.

eine wahrscheinlichkeitstheoretische Betrachtungsweise charakterisiert sein wird. Das werden wir auch bei der Schrödingergleichung wiederfinden.

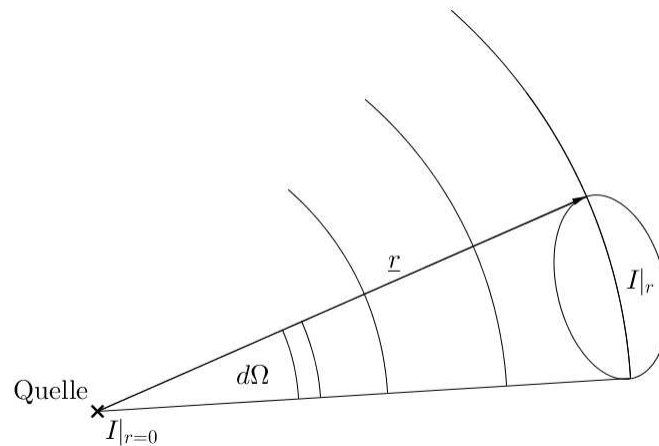


Abbildung 1.12: Die Abhängigkeit der Intensität der Dipolstrahlung vom Abstand von der Quelle ist nach der klassischen Elektrodynamik $\sim \frac{1}{r^2}$. Dennoch können auf einem Detektor gegebener Größe im beliebigen Abstand r von der Quelle nur $0, 1, 2 \dots$ Photonen registriert werden.

Erst durch die erfolgreiche Anwendung seiner Quantenhypothese auf den Photoeffekt, das Atommodell und weitere wichtige Aufgaben war letztlich auch Planck von der physikalischen Bedeutung seiner Entdeckung überzeugt. Für seine Strahlungstheorie erhielt er 1919 den Nobelpreis (rückwirkend für 1918).

B) Photoeffekt: *H. Hertz* und *Hallwachs* machten 1887 bzw. 1888 Experimente, in denen sie Metall mit UV-Licht bestrahlten. Dieses Licht konnte Elektronen aus dem Material herauslösen, welche dann eine kinetische Energie besaßen.

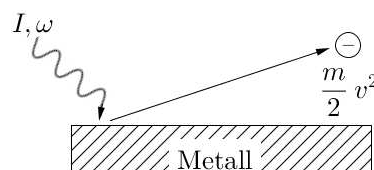


Abbildung 1.13: Schema des Photoeffekts. Licht der Intensität I und der Frequenz ω trifft auf eine Metalloberfläche und löst daraus ein Elektron mit der kinetischen Energie $\frac{m}{2}v^2$ aus.

P. Lenard machte nun die Entdeckung, dass die Geschwindigkeit der Elektronen unabhängig von der Intensität der Strahlung ist. Dies ist ein Widerspruch zur klassischen Optik (die auf den Maxwell-Gleichungen basiert), in der die Lichtenergie (pro Volumen), $W_{el} \propto I \propto E^2$ proportional zum Quadrat der Feldstärke ist. Die Erklärung kam von *A. Einstein* 1905 mit Hilfe von *Plancks* Photonenhypothese: Nimmt man an, dass die Lichtenergie aus Teilchen (Photonen) besteht, und ein Photon die Energie $\hbar\omega$ besitzt, dann gilt folgende Geradengleichung:

$$\hbar\omega = \frac{m}{2}v^2 + \Phi$$

Hierbei ist Φ die Austrittsarbeit des Metalls und als solche materialabhängig.

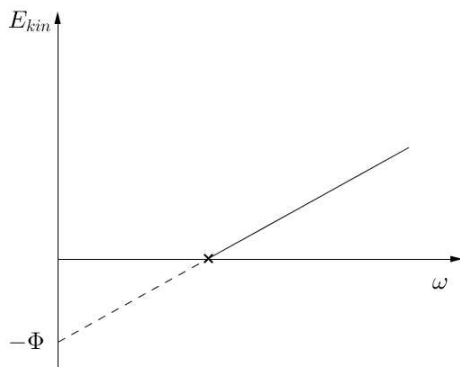


Abbildung 1.14: Abhängigkeit der Energie der Elektronen von der Frequenz

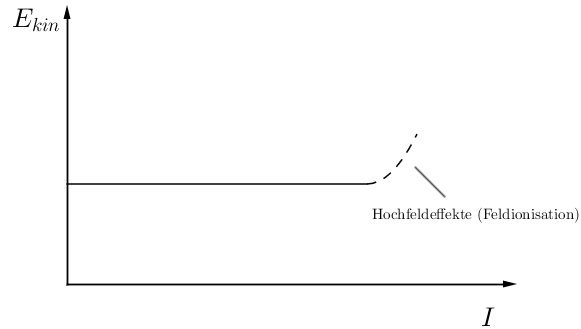


Abbildung 1.15: Abhängigkeit der Energie der Elektronen von der Intensität des Lichts

Das heißt, die Energie der Elektronen ist abhängig von der Frequenz des Lichtes aber unabhängig von der Feldstärke (Intensität). Die Zahl der Elektronen ist dabei proportional zur Intensität (zur Zahl der Photonen), da jedes herausgelöste Elektron ein Photon absorbiert.

Multiphotonen-Prozesses: Allerdings fand man mehr als ein halbes Jahrhundert später, dass bei großen Intensitäten des Lichtes ein anderes Verhalten auftritt: die Energie der herausgelösten Elektronen wird auf einmal doch wieder abhängig von der Intensität, wie in Abb. 1.14 illustriert,

$$E_{\text{kin}} = E_{\text{kin}}(I).$$

Auch das lässt sich mit einer Verallgemeinerung der Einsteinschen Photonentheorie erklären: bei hohen Intensitäten kann ein Elektron gleichzeitig mehrere Photonen absorbieren, was natürlich zu einer entsprechend vergrößerten kinetischen Energie führt¹³. Für sehr hohe Intensitäten ($N \gg 1$) verschwinden dann wieder die Unterschiede zwischen dem Effekt von N bzw. $N + 1$ Photonen (und damit der Quantisierung), und damit findet man wieder Gesetzmäßigkeiten, welche näherungsweise der klassischen Theorie entsprechen.

C) Compton-Effekt: *Compton* betrachtete die Lichtstreuung an freien Elektronen. Licht mit der Frequenz ω und dem Wellenvektor $\underline{k}$ (mit der Wellenlänge verknüpft über $k = 2\pi/\lambda$) trifft auf ein freies Elektron und wird an diesem gestreut. Das Elektron nimmt hierbei Impuls auf, und das Licht wird im Winkel ϑ gestreut. Misst man die Licht-Wellenlänge nach der Streuung so stellt man eine Rotverschiebung fest. Die widerspricht der klassischen Elektrodynamik, wie im Folgenden kurz erläutert wird. Das elektrische Feld steht senkrecht auf dem Wellenvektor $\underline{k}$ des einfallenden Lichtes (transversale Welle). Demzufolge müsste das Elektron mit der Frequenz ω des einfallenden Lichtes parallel zur Feldrichtung schwingen. Hierbei emittiert das Elektron in alle Richtungen elektromagnetische Wellen ebenfalls mit der Frequenz ω . Die ist mit der gemessenen Rotverschiebung offensichtlich nicht in Einklang zu bringen.

Versuchen wir nun, dies mit der Photonen-Hypothese zu erklären. Wir verstehen Licht nun als Strom von Teilchen (Photonen), die an dem freien Elektron gestreut werden. In dieser Photonen-Hypothese ist der Compton-Effekt also ein Stoßprozess, wie in Abb. 1.16 skizziert ist.

¹³Diese sogenannten Multiphotonen-Prozesse sind sehr gut experimentell untersucht worden, insbesondere bei der Photoionisation von Atomen und Molekülen durch intensive Laserstrahlung. Die quantenmechanische Theorie dieser Prozesse diskutieren wir im Kapitel 7.4.

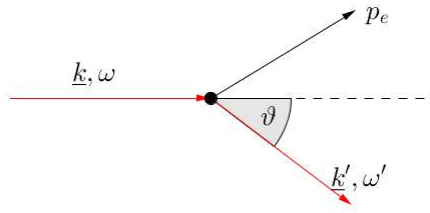


Abbildung 1.16: Lichtstreuung an freien Elektronen

Wir benutzen also die Energieerhaltung, wobei wir das Elektron als relativistisches Teilchen betrachten müssen¹⁴. Mit $\beta = v/c$ gilt:

$$E_{ph} = E'_{ph} + E'_e - E_e$$

$$\hbar\omega = \hbar\omega' + m_0c^2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right)$$

Außerdem benutzen wir die Impulserhaltung und setzen die Geschwindigkeit des Elektrons vor dem Stoß gleich 0.

$$\hbar\mathbf{k} = \hbar\mathbf{k}' + \frac{m_0\mathbf{v}'}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Das Resultat ist:

$$\lambda' = \lambda + \lambda_C(1 - \cos \vartheta) \quad (1.15)$$

fest. Hierbei ist λ_C die sogenannte Compton-Wellenlänge, für die gilt:

$$\lambda_C = \frac{h}{mc}$$

Der Compton-Effekt ist also eine direkte Bestätigung für die Photonen-Hypothese von Planck und Einstein. Siehe dazu auch Übungsaufgaben, Abschnitt 1.3.4.

Wir können damit aus den Phänomenen A), B) und C) folgendes Fazit zu den Eigenschaften von Licht (des elektromagnetischen Feldes) ziehen:

1. Die klassische Elektrodynamik erklärt makroskopische Phänomene, wie Brechung oder Reflexion.
2. Mikrophänomene (Wechselwirkung Licht-Atom/Elektron) erfordern Annahmen über die Quanten-Natur (Photonen).

Moderne Theorie: Die moderne Theorie des elektromagnetischen Feldes ist die Quantenelektrodynamik (2. Quantisierung). Hier ersetzt man die elektrodynamischen Potentiale $(\underline{A}, \Phi)$ durch die Operatoren $(\hat{\underline{A}}, \hat{\Phi})$, welche – genau wie die Potentiale der klassischen Elektrodynamik – die Maxwell-Gleichungen erfüllen. Zusätzlich erfüllen die Potentiale Kommutationsregeln für bosonische Operatoren.

¹⁴Im nichtrelativistischen Grenzfall ergibt sich die Thomson-Streuung.

1.3.2 Quanteneigenschaften der Atome

Jedes Atom hat ein charakteristisches Linienspektrum. 1885 stellte *Balmer* für die experimentell bestimmten Emissionsspektren von Wasserstoff eine Formel auf. Diese Formel beschreibt die Abstände einiger gemessener Emissionslinien.

$$\lambda = \frac{n_1^2}{n_1^2 - 4} \cdot C$$

Hierbei ist $n_1 = 3, 4, \dots$

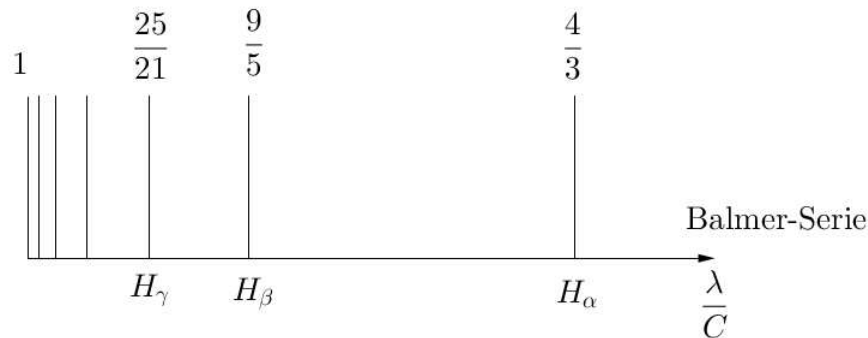


Abbildung 1.17: Abstände der Balmer-Serie des Emissionsspektrums von Wasserstoff

Die Quantenmechanik liefert hierfür die Erklärung. Im Atom liegen die Energie-Niveaus gemäß ihrer Hauptquantenzahl in ebensolchen Abständen. Eine Emissionslinie entspricht jetzt einem Übergang von einem Energie-Niveau auf ein anderes. Die Balmer-Serie beschreibt alle Übergänge auf die Hauptquantenzahl $n = 2$. Für die anderen Quantenzahlen gibt es entsprechende analoge Serien (s. Kapitel 5).

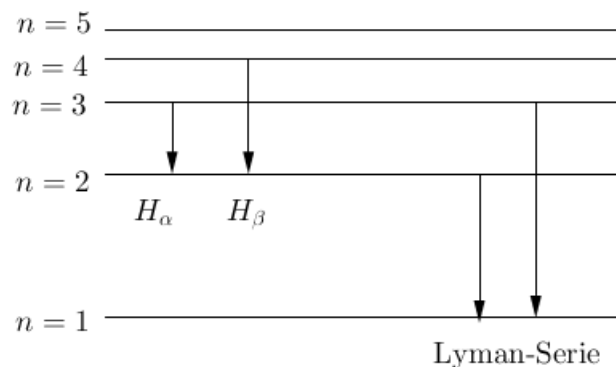


Abbildung 1.18: Diskrete Energie-Niveaus gemäß der Hauptquantenzahl n . Links Prozesse der Balmer-Serie, rechts die Lyman-Serie.

1913 gelang *Franck und Hertz* der experimentelle Nachweis diskreter Niveaus durch Stoßanregung von Atomen. Das klassische Atommodell von *Rutherford und Thomson* besagte, dass das Atom insgesamt neutral ist und einen kleinen positiven Kern besitzt. Diese Vorstellung gestattete die korrekte Beschreibung der Streuung von α -Teilchen an einer dünnen Goldfolie (Rutherford-Formel). Nach diesem Ergebnis müssen nun negative Ladungen im Atom existieren, damit dieses neutral ist. Offen blieb die Frage, wie diese Ladungen (Elektronen) im Atom verteilt sind, wobei man wusste, dass das Atom weitgehend "leer" ist.

Die naheliegende Idee war, dass sich die Elektronen analog zu Planeten auf Kreisbahnen (auf Ellipsen um die Sonne) um den Kern bewegen. Das Problem an diesem Modell ist, dass ein solches Atom aber instabil ist. Dies sehen wir im Folgenden ein. Ein rotierendes Elektron vollführt eine beschleunigte Bewegung (Änderung der Richtung). Es stellt einen elektromagnetischen Dipol, welcher Strahlung emittiert, dar. Der Energieverlust ergibt sich nach der Elektrodynamik zu:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{2}{3c^3} |\ddot{\underline{p}}|^2$$

Mit diesem Energieverlust ist das Planeten-Modell instabil. Betrachte nun:

$$\begin{aligned} |\underline{F}_Z| &= |\underline{F}_{COUL}| \\ \frac{mv^2}{r} &= \frac{Z_e \cdot e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieses Kräftegleichgewichtes einer Kreisbahn ohne Strahlung kann man die charakteristische Lebensdauer eines Atoms nach diesem Modell abschätzen. Es ergeben sich Zeiten von:

$$t \approx 10^{-11} \text{ s} \cdot \frac{1}{Z^4}. \quad (1.16)$$

Dieses Ergebnis widerspricht natürlich den Erkenntnissen der Stabilität der Atome.

Das Bohrsche Atommodell: *N. Bohr* versuchte 1913, die Stabilität der Atome zu “begründen” durch folgende Postulate.

1. Es existieren stabile (strahlungsfreie) Bahnen. Die Auswahl erfolgt gemäß:

$$\underbrace{r_n \cdot p_n}_{L_n} = n \cdot \hbar \quad (1.17)$$

Hierbei ist $n \in \mathbb{Z}$ und L_n der Betrag des Drehimpulses. Es existieren also nur bestimmte Bahnen, da der Drehimpuls nur bestimmte diskrete Werte annehmen kann.

2. Der Übergang zwischen Bahnen geschieht nicht allmählich, sondern durch Emission eines Photons:

$$\hbar\omega_{m,n} = E_m - E_n$$

Dies erklärt die Balmer-Serie, sowie die anderen Serien wasserstoffähnlicher Atome (Kern mit der Ladung Z).

3. Die klassisch stabilen Bahnen sind bestimmt durch:

$$\frac{m_e v^2}{r} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Mit dem ersten Postulat ergibt sich

$$p^2 r^2 = \frac{Ze^2 m_e r}{4\pi\epsilon_0} = n^2 \hbar^2$$

mit $n = 1, 2, \dots$. Hiermit lassen sich die erlaubten Radien berechnen:

$$r_n = a_B \frac{n^2}{Z}, \quad (1.18)$$

wobei a_B der Bohr-Radius ist:

$$a_B = \frac{\hbar^2}{m_e} \frac{4\pi\epsilon_0}{e^2}. \quad (1.19)$$

Die Energie auf der n -ten Bahn wird dann zu:

$$E_n = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_B} \frac{Z^2}{n^2} = -\frac{Z^2}{n^2} E_{\text{Ryd}}, \quad E_{\text{Ryd}} = \frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_B},$$

mit der Rydberg-Energie $E_{\text{Ryd}} = 13.6\text{eV}$. Das Bohr'sche Atommodell erklärt zwar die Grundzüge des Linienspektrums, enthält aber nur einen kleinen Teil der möglichen elektronischen Zustände im Atom. Außerdem ist der Charakter der Elektronen-“Bahnen” völlig falsch. Die Quantenmechanik ergibt hingegen, dass das Elektron kein Punktteilchen, sondern räumlich ausgedehnt ist. Nur damit lässt sich die Stabilität des Atoms schlüssig erklären.

1.3.3 Beugung freier Elektronen

1927 machten *Davisson und Germer* Versuche zur Elektronenbeugung am Kristallgitter.

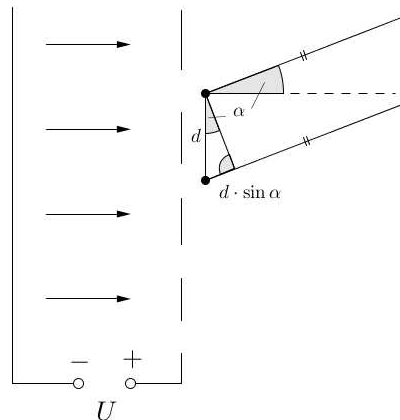


Abbildung 1.19: Versuchs-Skizze zur Beugung von Elektronen am Kristallgitter

Mit der Spannung U kann, gemäß

$$\frac{m}{2} v^2 = e \cdot U,$$

die Energie der Elektronen berechnet werden. Auf dem Schirm sieht man ein Interferenzmuster, wenn man die Intensität aufträgt. Hierbei sind x die ganzen Zahlen, bei denen ein Maximum auftritt.

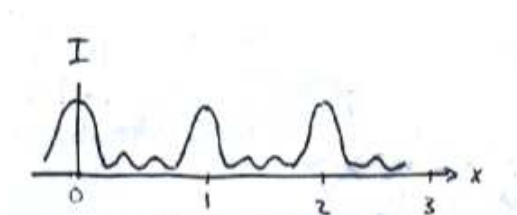


Abbildung 1.20: Intensitätsverteilung der Elektronenbeugung

Die Geschwindigkeit der Elektronen kann durch die Spannung eingestellt werden. Man stellt fest, dass die Lage der Maxima bei unterschiedlichen Geschwindigkeiten bei unterschiedlichen x liegen und kann folgende Beziehung herleiten:

$$x = \frac{m_e \cdot U}{h} \cdot d \sin \alpha. \quad (1.20)$$

Dies ist typisch für Beugung. Bei Licht erhält man die Formel für die Maxima zu:

$$d \sin \alpha = x \lambda$$

Hierbei sind wieder x die Maxima. Man kann also auch Elektronen eine Wellenlänge zuordnen, wenn man beide Gleichungen vergleicht und erhält:

$$\lambda_e = \frac{h}{m_e \cdot v} = \frac{h}{p_e} \quad (1.21)$$

Dies geht auf *DeBroglie* (1924) zurück. Indem man Elektronen eine Wellenlänge zuordnet, erklärt man die beobachteten Interferenzeffekte am Kristallgitter.

Beispiel: Betrachten wir ein Elektronengas im Gleichgewicht. Aus der klassischen kinetischen Gastheorie folgt, dass die Geschwindigkeiten der Teilchen um einen Mittelwert $\bar{v}$ herum Maxwell-verteilt sind mit der Standardabweichung (Breite) v_T , die als

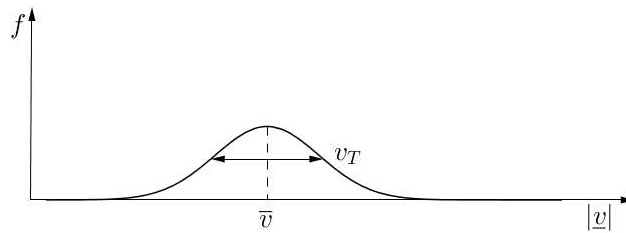


Abbildung 1.21: Maxwell-verteilte Geschwindigkeit

“thermische Geschwindigkeit” bezeichnet wird:

$$v_T \approx \sqrt{\frac{2\pi k_B T}{m}}.$$

Verwendet man diese Geschwindigkeit in Gleichung (1.21), so ergibt sich die *thermische DeBroglie-Wellenlänge*:

$$\lambda_T = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}}.$$

Dies ist wichtig etwa für die Behandlung von dichten Gasen oder Plasmen, insbesondere für die Beschreibung von Sternen und Planeten. Der Entartungsparameter, den wir in Glg. (1.1) eingeführt hatten, sagt uns nun, dass quantenmechanische Eigenschaften wichtig werden, wenn

$$n\lambda_T^3 \gtrsim 1$$

gilt. Diese Beziehung lässt sich übertragen auf einen Zusammenhang zwischen Dichte und Temperatur, und sie trennt klassische von Quanten-Vielteilchensystemen [Bonitz, 2016].

Grenzen der klassischen Physik: Fazit

Dualismus von Welle und Teilchen bedeutet, dass Licht und Mikroteilchen (insbesondere Elektronen) beide sowohl Wellen- als auch Teilcheneigenschaften besitzen.

1. Licht

- Welleneigenschaften: $\omega, \underline{k}$, mit $\omega = ck$ und $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{h}{p_{ph}}$
- Teilcheneigenschaften (Photonen): $E_{ph} = \hbar\omega$, $\underline{p}_{ph} = \hbar\underline{k}$

2. Mikroteilchen

- Teilcheneigenschaften: $E, \underline{p} = m\underline{v}$, mit $E = \frac{p^2}{2m}$
- Welleneigenschaften: $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{h}{mv}$

Hiermit können wir Quanteneffekte durch diese “naive Theorie” qualitativ korrekt beschreiben und erklären. Allerdings fehlen eine Begründung wie auch eine mathematische Herleitung. Eine strenge Erklärung bzw. Ableitung geschah erst durch die Quantenmechanik, die vor allem von 1925-1928 von *Heisenberg, Schrödinger, Born, Sommerfeld, Dirac, Pauli, Jordan, Bohr* und vielen anderen geprägt wurde und der wir uns im Folgenden widmen werden.

1.3.4 Aufgaben

1. Berechnen Sie die Entropie der Wärmestrahlung ausgehend von der inneren Energie U für die Fälle Planck-Verteilung (1.13), Wien-Formel (1.5) und Rayleigh-Formel, Glg. (1.7).
2. Compton-Effekt: Leiten Sie die Formel (1.15) ab.
3. Leiten Sie das Resultat (1.16) für die “Lebensdauer” des klassischen Atoms ab.