

Statistische Physik und Thermodynamik, SS 2025

Prof. Dr. Michael Bonitz

Übungszettel 5, Abgabe 19. Mai 10:15

1. Wiederholung: *Mikrokanonische Gesamtheit*¹

- (a) Erläutern Sie die Definition des mikrokanonischen Ensembles.
- (b) Geben Sie die mikrokanonische Gibbsverteilung an und erläutern Sie das Grundpostulat der Statistischen Physik.
- (c) Geben Sie den mikrokanonischen Dichteoperator an und diskutieren Sie die quantenmechanische Zustandssumme.
- (d) Erläutern Sie den Zusammenhang zwischen mikrokanonischer Entropie und den thermodynamischen Funktionen Temperatur, Druck und chemisches Potential.

2. Aufgaben: *Gleichgewichts-Verteilung. Entropie* (28 Punkte)

- (a) Entropie der Wärmestrahlung. Grundlage der Ableitung des Strahlungsgesetzes durch Planck war seine Berechnung der Entropie. Er ging von folgenden Eigenschaften des Systems aus²: a) der Resonator ist energetisch isoliert, d.h. seine Energie $U = \text{const.}$ b) Es wird ein Ensemble aus N identischen Resonatoren betrachtet. c) Jeder Resonator enthält stehende Wellen verschiedener Frequenzen ν . d) Die Gesamtenergie ist ein ganzzahliges Vielfaches des Energiequants $\epsilon = h\nu$, d.h. $U_N = N \cdot U = P \cdot \epsilon$. Ausgehend von Plancks Formel

$$W = \frac{(N + P - 1)!}{(N - 1)!P!} \quad (1)$$

berechne man die Entropie der Wärmestrahlung und benutze die Stirling-Formel für den Grenzfall $N \rightarrow \infty$ und $P \rightarrow \infty$. Wie lässt sich Formel (1) begründen und was für einen Zufallsprozess beschreibt sie? Man vergleiche das Resultat mit dem Ergebnis für das ideale Gas (Aufgabe c, Blatt 4). (8 Punkte)

¹Theoriefragen sind mündlich zu beantworten, die wichtigsten Schritte überzeugend zu erläutern.

²s. Abschnitt III. von Max Planck, "Zur Geschichte der Auffindung des physikalischen Wirkungsquantums", in: Max Planck, "Vorträge, Reden, Erinnerungen", s. Vorlesungsseite, downloads

- (b) Für ein energetisch isoliertes Teilchen im 1-dimensionalen Oszillatorpotential (Frequenz ω , mikrokanonisches Ensemble) berechne man das klassische Zustandsintegral $Z_\mu(E; \omega) = \int d\Omega \delta[H(p, x) - E]$. Untersuchen Sie auch die Ableitungen von Z_μ nach E und ω und diskutieren Sie das Ergebnis und Grenzfälle.

(10 Punkte)

- (c) Man zeige, dass bei einer unitären Dynamik (quantenmechanische Dynamik, die durch den unitären Zeitentwicklungsoperator beschrieben wird) die quantenmechanische Entropie

$$S(t) = -k_B \text{Tr} \hat{\rho}(t) \ln \hat{\rho}(t) \quad (2)$$

zeitlich konstant bleibt. Hinweis: Man verwende die Heisenberg-Darstellung für die Zeitabhängigkeit der Operatoren $\hat{\rho}$ und $\ln \hat{\rho}$. Man diskutiere qualitativ die Fälle eines reinen Zustandes, einer gemischten Gesamtheit sowie den Einfluss von Approximationen, $\hat{H} \rightarrow \hat{H}^{\text{approx}}$. Unter welcher Voraussetzung ändert sich die Entropie zeitlich?

(10 Punkte)