

Statistische Physik und Thermodynamik, SS 2025

Prof. Dr. Michael Bonitz

Übungszettel 4, Abgabe 12. Mai 10:15

1. **Wiederholung:** *Statistische Mechanik des Gleichgewichts. Entropie*¹

- (a) Erläutern Sie den Zusammenhang zwischen Wahrscheinlichkeit eines Zustandes, Gleichgewichtsverteilung und Entropie.
- (b) Vergleichen Sie Boltzmanns Entropieformel (1) und den Ausdruck über die Wahrscheinlichkeitsverteilung $f(x)$.
- (c) Erläutern Sie die Shanonsche Information und ihren Zusammenhang mit der Entropie.
- (d) Erläutern Sie die Extremaleigenschaften von Entropie und Information.

2. **Theorie:** *Dichteoperator und Dichtematrix*

- (a) Erläutern Sie den Dichteoperator eines integrierbaren Systems. Diskutieren Sie die Diagonal- und Offdiagonal-Beiträge der Dichtematrix. Erläutern Sie das verallgemeinerte Gibbs-Ensemble. (Grundlage: Skript)

3. **Aufgaben:** *Gleichgewichts-Verteilung. Entropie* (22 Punkte)

- (a) Leiten Sie die Boltzmann-Formel für den Zusammenhang von Entropie und Zustands-Wahrscheinlichkeit W (Zahl der Mikrozustände, nicht normiert),

$$S = k_B \ln W \quad (1)$$

ab. Verwenden Sie folgende Voraussetzungen:

$$\begin{aligned} S(W) &= f(W), \\ f(W_1 \cdot W_2) &= f(W_1) + f(W_2). \end{aligned}$$

Hinweis: man differenziere f nach den Argumenten und finde die allgemeine Lösung der Differentialgleichung. (5 Punkte)

- (b) Man leite die verallgemeinerte Gibbs-Verteilung p_i^{GGE} (generalized Gibbs ensemble) aus dem Extremalprinzip der Entropie ab mit den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^M p_i &= 1, \\ \sum_{i=1}^M A_i^{(k)} p_i &= \overline{A^{(k)}}, \end{aligned}$$

¹Theoriefragen sind mündlich zu beantworten, die wichtigsten Schritte überzeugend zu erläutern.

s. Vorlesung. Die Verteilung ist zu normieren. Zeigen Sie, dass die Entropie für p_i^{GGE} maximal ist und bestimmen Sie $S(p_i^{GGE})$. (7 Punkte)

- (c) Man berechne, ausgehend von Boltzmanns Formel (1) die Entropie eines klassischen Vielteilchensystems aus N identischen Teilchen mit der vorgegebenen (beliebigen) Wahrscheinlichkeits-Dichte $f(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ mit der Normierung $\int d^6\Omega f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = 1$.

Hinweis: Man zerlege den Phasenraum in M gleiche Teilvolumina $\Delta\Omega_i$. Die mittlere Zahl der Teilchen ΔN_i in $\Delta\Omega_i$ ist durch f bestimmt. Boltzmanns W bestimmt man als Gesamtzahl der Möglichkeiten, N identische Teilchen auf M Teilintervalle zu verteilen (Permutation mit Wiederholung). Im Limes $N \rightarrow \infty$ benutze man die Stirling-Formel $N! \approx (N/e)^N \sqrt{2\pi N}$.

(10 Punkte)