

Statistische Physik und Thermodynamik, SS 2025

Prof. Dr. Michael Bonitz

Übungszettel 2, Abgabe: Mo, 28. April 10:15

1. **Wiederholung:** *Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie*¹

- (a) Viele Probleme der Statistischen Physik des Gleichgewichts lassen sich auch durch Lösung der mechanischen Bewegungsgleichungen – zumindest numerisch – untersuchen. Geben Sie Beispiele an, für die dieser Zugang nützlich ist und zusätzliche Informationen zur Thermodynamik liefert (welche?). Geben Sie Beispiele an, bei denen dieser Zugang fragwürdig ist (s. Vorlesung).
- (b) Erläutern Sie, wie sich die mechanische Beschreibung exakt in eine Statistische überführen lässt. Definieren Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte.
- (c) Erläutern Sie die statistische Mittelung der mikroskopische Wahrscheinlichkeitsdichte und die Eigenschaften der resultierenden Gibbs-Verteilung.
- (d) Erläutern Sie die Liouville-Gleichung und das Liouville-Theorem.

2. **Theorie:** *Wichtige Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Zentraler Grenzwertsatz*²

- (a) Zeigen Sie, dass die Binomialverteilung im Grenzfall großer Ereigniszahlen in die Gauss-Verteilung übergeht.
- (b) Erarbeiten Sie die Voraussetzungen, Aussage und Beweisidee des zentralen Grenzwertsatzes (s. z.B. Fließbach).

3. **Aufgaben:** *Wahrscheinlichkeitstheorie* (21 Punkte)

- (a) In einer repräsentativ ausgewählten Gesamtheit werden alle Individuen auf das neue Virus α_Ω getestet, mit dem Ergebnis, dass ein Prozentsatz K erkrankt ist. Die Individuen werden jetzt zusätzlich einem neuen experimentellen Schnelltest unterzogen. Dabei wurde festgestellt, dass von den tatsächlich Erkrankten 90% als erkrankt erkannt werden. Von den Gesunden werden 1% durch den Test fälschlich als krank verdächtigt.
 - i. Für welche K liefert der Schnelltest bei N Individuen die korrekte Zahl von Erkrankten mit einem Fehler von maximal 10%?
 - ii. Wenn ein Individuum aus diesen N einen positiven Schnelltest erhält, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es tatsächlich erkrankt ist, in Abhängigkeit von K ?

¹Theoriefragen sind mündlich zu beantworten und in der Übung zu erläutern.

²s. u.a. Fließbach, Nolting

iii. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Individuum bei M aufeinanderfolgenden Schnelltests abwechselnd positiv und negativ getestet wird?

(9 Punkte)

- (b) In der Vorlesung wurde auf den zweifelhaften Nutzen einer mechanischen Beschreibung (experimentell oder theoretisch) biologischer Objekte hingewiesen. Ein ambitionierter Student wollte das am Beispiel der Körpertemperatur eines Menschen überprüfen. Er entwickelte einen Detektor, mit dem er die Geschwindigkeit der Moleküle der Luft, die ein Mensch ausatmet, messen kann. Mit welcher Genauigkeit Δv (in m/s) müsste er die Geschwindigkeit der Moleküle in Strömungsrichtung \mathbf{u} messen, um daraus eine Temperaturerhöhung von 37.0 Grad auf 37.5 Grad mit einem Fehler von unter 1% zu detektieren? Die Wechselwirkung der Luftmoleküle miteinander sei vernachlässigbar. Daher kann zur Abschätzung die Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung verwendet werden,

$$f(\mathbf{v}; \mathbf{u}, T) = C e^{-\frac{m}{2k_B T}(\mathbf{v}-\mathbf{u})^2}, \quad (1)$$

wobei C die Normierungskonstante ist und \mathbf{u} und T die mittlere Strömungsgeschwindigkeit bzw. die Temperatur bezeichnen. Mit wachsender Körpertemperatur nehme (in diesem Temperaturbereich) sowohl die Zahl der ausgeatmeten Moleküle als auch u quadratisch ab, so dass sie bei 42 Grad auf Null abfallen. Zeichnen Sie die Verteilungsfunktionen für beide Temperaturen.

Hinweis: man untersuche die Standardabweichung der Geschwindigkeit parallel zu \mathbf{u} . Für m verwende man die mittlere Masse eines Sauerstoff-Moleküls in Luft und bestimme damit Δv . (10 Punkte)