Statistische Physik und Thermodynamik, SS 2025

Prof. Dr. Michael Bonitz

Übungszettel 10, Abgabe: Montag, 23. Juni 10:15

1. **Wiederholung**: *Maxwell-Boltzmann-Statistik*[1]

   (a) Erläutern Sie die Berechnung der Maxwell-Verteilung und diskutieren Sie ihre Gültigkeitsgrenzen.

   (b) Erläutern Sie die Berechnung der Maxwell-Boltzmann-Verteilung.

   (c) Erläutern Sie den Gleichverteilungssatz der Statistischen Mechanik. Diskutieren Sie seine Gültigkeit und die zugrunde liegenden Annahmen.

2. **Aufgaben**: *Chemisches Gleichgewicht. Maxwell-Boltzmann-Statistik* (36 Punkte)

   (a) Man untersuche das Ionisations-Dissoziations-Gleichgewicht von Wasserstoff (s. Skript) als Funktion von Temperatur und Dichte (Druck). Anstelle des Ausdrucks der Vorlesung verwende man für die chemischen Potentiale

$$\mu_a = k_B T \ln n_a \Lambda_a^3, \quad a = e, p, \qquad \Lambda_a = h/(2\pi m_a k_B T)^{1/2} \tag{1}$$

$$\mu_b = k_B T \ln n_b \Lambda_b^3 - k_B T \ln Z_b^{int}, \quad b = H, H_2, \tag{2}$$

$$Z_b^{int} = \sum_i g_i e^{-E_i/k_BT} \approx e^{-E_{b0}/k_BT}. \tag{3}$$

   Hier ist Λ_a die thermische DeBroglie Wellenlänge von Elektronen bzw. Protonen, und Z_b^{int} bezeichnet die Zustandssumme der Bindungszustände der Atome bzw. Moleküle (i numeriert alle Energie-Eigenwerte und g_i deren Entartungsfaktor), die durch den Beitrag des Grundzustandes ($E_{b0} < 0$) angenähert werden soll.

   i. Formulieren Sie die Bedingungen für das Ionisations-Dissoziations-Gleichgewicht durch die chemischen Potentiale.

   ii. Finden Sie daraus ein Gleichungssystem für die Dichten der Sorten $n_a = N_a/V$ und die Konzentrationen $c_a = N_a/N$. Für die Gesamtteilchenzahl verwende man die Gesamtzahl aller Elektronen (fixiert), die entweder frei oder in Atomen bzw. Molekülen gebunden sind, $N \equiv N_e + N_H + 2N_{H_2}$. Die Gesamt-Elektronendichte ist entsprechend $n = N/V$.

   iii. Man stelle qualitativ dar: die Isothermen $c_e(n), c_H(n), c_{H_2}(n)$, sowie – für eine fixierte Dichte n – die Temperaturabhängigkeit der Konzentrationen und untersuche den Ionisations- und Dissoziationsgrad (Anteil freier Elektronen bzw. Anteil atomaren Wasserstoffs).

[1] Theoriefragen sind mündlich zu beantworten und an der Tafel zu demonstrieren. Für die Klausurzulassung sind drei (benotete) erfolgreiche Auftritte erforderlich.

iv. Das vorliegende Modell eines partiell ionisierten Wasserstoff-Plasmas vernachlässigt wesentliche Wechselwirkungseffekte und ist daher nur bei geringen Dichten n gültig. Eine wesentliche Verbesserung kann erzielt werden durch Berücksichtigung der Coulombwechselwirkung in der inneren Energie der geladenen Teilchen: $U_e + U_p = 3k_BT(N_e + N_p)/2 + U_{\text{int}}$. Im Rahmen der Debye-Approximation verwende man $U_{\text{int}} \approx -\kappa e^2$ mit $\kappa^2 = 4\pi(n_e + n_p)e^2/k_BT$. Die Wechselwirkung führt zu einer Korrektur der chemischen Potentiale von Elektronen und Protonen. Finden Sie diese und geben Sie das modifizierte Massenwirkungsgesetz an.

v. Berechnen sie die Isothermen der Konzentrationen der einzelnen Sorten unter Berücksichtigung der Coulomb-Wechselwirkung. Diskutieren Sie die Grenzen dieses Modells. Was ist im Limes großer Dichten zu erwarten?

(15 Punkte)

(b) Untersuchen Sie die thermodynamischen Eigenschaften eines klassischen idealen relativistischen Gases.

i. Leiten sie die kanonische Zustandssumme ab (ohne Ausführen der Integration.)

ii. Untersuchen Sie den nichtrelativistischen Grenzfall.

iii. Berechnen Sie Z_K für den ultrarelativistischen Limes.

iv. Berechnen Sie für den ultrarelativistischen Limes die Zustandsgleichung, die Entropie und die innere Energie.

(11 Punkte)

(c) Die Verteilungsfunktion in einem Gas sei gegeben durch eine orts- und zeitabhängige Maxwell-Verteilung,

$$f(\vec{r}, \vec{v}, t) = \frac{\alpha(\vec{r}, t)}{[2\pi m k_B T(\vec{r}, t)]^{3/2}} \exp\left[-\frac{\left(\vec{v} - \vec{\beta}(\vec{r}, t)\right)^2}{2mk_BT(\vec{r}, t)} \right], \tag{4}$$

wobei die Funktionen $\alpha(\vec{r}, t)$ und $\vec{\beta}(\vec{r}, t)$ nicht von $\vec{v}$ abhängen.
Berechnen Sie

i. die Dichte $n(\vec{r}, t) = \int d\vec{v}\, f(\vec{r}, \vec{v}, t)$,

ii. die Stromdichte $\vec{j}(\vec{r}, t) = \int d\vec{v}\, \vec{v}\, f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ und das Geschwindigkeitsfeld $\vec{u}(\vec{r}, t) = \vec{j}(\vec{r}, t)/n(\vec{r}, t)$,

iii. den Drucktensor $P_{\alpha\beta}(\vec{r}, t) = \int d\vec{v}\, (v_\alpha - u_\alpha)(v_\beta - u_\beta) f(\vec{r}, \vec{v}, t)$,

iv. sowie die kinetische Energie.

v. Diskutieren Sie das Resultat und Grenzen der Anwendbarkeit von Glg. (4).

(10 Punkte)