Entropie von Quantengasen. Wir berechnen jetzt die Entropie des idealen Bose- und Fermigases unter Verwendung des allgemeinen Ausdruckes (6.38). Im Großkanonischen Ensemble folgt die Entropie durch Differentation des Großkanonischen Potentials Ω. Interessanterweise stimmen die Ausdrücke für Ω für Fermionen, Glg. (6.13) und Bosonen, Glg. (6.37) bis auf zwei Vorzeichen überein, so dass wir sie in einer Formel zusammenfassen können (dabei gilt $a \neq 0$)

$$\Omega^a(T,V,\mu) = -a\, k_B T \sum_p \ln\left[1 + a\, e^{\beta(\mu-\epsilon_p)}\right] \,. \tag{6.42}$$

Die Exponente können wir mit Hilfe von Glg. (6.41) durch die Bose- bzw. Fermiverteilung ausdrücken und erhalten

$$\Omega^a(T,V,\mu) = -a\, k_B T \sum_p \ln\left[1 + \frac{a n_p^a}{1 - a n_p^a}\right] = a\, k_B T \sum_p \ln\left(1 - a\, n_p^a\right) \,.$$

Damit haben wir das Großkanonische Potential umgeschrieben und durch die Bose- bzw. Fermiverteilung ausgedrückt. Dies ist vorteilhaft für die Berechnung der Entropie, gemäß der allgemeinen Formel

$$\begin{aligned} \frac{S^a(T,V,\mu)}{k_B} &= -\frac{\partial \Omega^a}{\partial k_B T}\bigg|_{V,\mu} = \\ &= -a \sum_p \ln\left(1 - a\, n_p^a\right) - a\, k_B T \sum_p \frac{\partial}{\partial k_B T} \ln\left(1 - a\, n_p^a\right) \,. \end{aligned} \tag{6.43}$$

Wir formen nun die Summe im zweiten Term um, wobei wir ausnutzen $\partial_{k_B T} = -\beta^2 \partial_\beta$, sowie

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \beta} n_p^a &= -n_p^{a\,2} (\epsilon_p - \mu)\, e^{\beta(\epsilon_p - \mu)} = \\ &= -n_p^{a\,2}\, k_B T \ln\left[\frac{1 - a\, n_p^a}{n_p^a}\right] \cdot \frac{1 - a\, n_p^a}{n_p^a} \,, \end{aligned}$$

so dass wir schreiben können

$$\begin{aligned} \sum_p \frac{\partial}{\partial k_B T} \ln\left(1 - a\, n_p^a\right) &= -a \sum_p \frac{-\beta^2 \partial_\beta n_p^a}{1 - a\, n_p^a} = \\ &= -a\beta \sum_p n_p^a \ln\left[\frac{1 - a\, n_p^a}{n_p^a}\right] \,. \end{aligned}$$

Dies setzen wir nun in Glg. (6.43) ein und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{S^a(T,V,\mu)}{k_B} &= -a \sum_p \ln\left(1 - a\, n_p^a\right) + \sum_p n_p^a \ln\left[\frac{1 - a\, n_p^a}{n_p^a}\right] = \\ &= \sum_p \left\{(n_p^a - a)\ln(1 - a n_p^a) - n_p^a \ln n_p^a\right\} \,. \end{aligned}$$

Nach Einsetzen von a erhalten wir das Endergebnis für die Entropie eines idealen Bose- bzw. Fermigases (oberes bzw. unteres Vorzeichen):

$$\frac{S^{\mathrm{B/F}}(T,V,\mu)}{k_B} = \sum_p \left\{\pm(1 \pm n_p)\ln(1 \pm n_p) - n_p \ln n_p\right\} \,. \tag{6.44}$$

Im Fall der Maxwell-Boltzmann-Statistik ($a \to 0$) bleibt nur der zweite Term übrig[26].

Aufgabe: Man untersuche dieses Ergebnis genauer, s. Aufgaben, Abschn. 6.6.

[26]Man prüfe diese Aussage, da wir in Glg. (6.42) $a \neq 0$ angenommen hatten.