

Quantenmechanik I, WS 2023/24

Prof. Dr. Michael Bonitz

Übungszettel 12 (Abgabe: Montag 22.1. 10:00)

1. Wiederholung (mündlich): *Spin. Pauligleichung. Spindynamik*

- (a) *verlängert*: Diskutieren Sie die quantenmechanische Beschreibung des Wasserstoffatoms im schwachen homogenen Magnetfeld (einfacher Zeeman-Effekt). Erläutern Sie das modifizierte Energiespektrum und die Wellenfunktionen.
- (b) Erläutern Sie das Verhalten eines freien Teilchens im Magnetfeld (Landau-Quantisierung), s. Aufgaben.
- (c) Erläutern Sie die quantenmechanische Beschreibung der Spindynamik. Erläutern Sie das Phänomen der Spinresonanz.
- (d) Erläutern Sie den Aharonov-Bohm-Effekt, s. Aufgaben.

2. Aufgaben (31 Punkte): *Spin. Pauli-Gleichung*

- (a) *verlängert*: Beweisen Sie, dass $e^{i\phi\hat{\sigma}_k}$, $k = x, y, z$ die Wirkung eines Drehoperators (um welche Achse?) hat. (Hinweis: man entwickle Real- und Imaginärteil in eine Taylor-Reihe. (5 Punkte)
- (b) *verlängert*: Zeigen Sie, dass die Lösungen der Pauligleichung die *Kontinuitätsgleichung* erfüllen und leiten Sie die verallgemeinerten Ausdrücke für Wahrscheinlichkeitsdichte und -stromdichte ab (vgl. Vorlesung, 6 Punkte).
- (c) Freies Teilchen im (starken) Magnetfeld: in der Vorlesung wurde das Landau-Problem auf einen 1D Oszillator zurück geführt, wobei allerdings die Symmetrie in der Ebene senkrecht zu \mathbf{B} nicht deutlich wurde. Finden Sie eine Lösung, die diese Symmetrie ausnutzt. Hinweis: man verwende eine symmetrische Eichung, $\mathbf{A} = (-y, x, 0)B/2$ und gehe zu Polarkoordinaten über. (15 Punkte)
- (d) Aharonov-Bohm-Effekt: Zeigen Sie, dass sich für ein Raumgebiet, in dem $B = 0$ gilt, durch geeignete Eichung die EM-Potentiale aus dem Pauli-Hamiltonian vollständig eliminieren lassen. Dennoch bleibt die Wellenfunktion vom Feld abhängig. Wie? Diese Abhängigkeit lässt sich durch ein Interferenz-Experiment nachweisen. Skizzieren Sie die Idee eines solchen Experimentes (s. Skript). (6 Punkte)
- (e) **Zusatzaufgabe (verlängert)**: Man löse das Eigenwertproblem des Operators $\hat{\sigma}_n$ – die Projektion von $\hat{\vec{\sigma}}$ auf eine beliebige Raumrichtung, gegeben durch den Einheitsvektor \vec{n} .