

Quantenmechanik I, WS 2023/24

Prof. Dr. Michael Bonitz

Übungszettel 9 (Abgabe: Montag 18. Dezember 10:00)

1. Wiederholung (mündlich): Drehimpuls.

- (a) Diskutieren Sie die Eigenschaften des Drehimpulsoperators $\hat{\mathbf{L}}$ (Messbarkeit, Vertauschbarkeit, Kommutationsregeln usw.).
- (b) Erläutern Sie das Eigenwertproblem des allgemeinen Drehimpulses \hat{J} und diskutieren Sie den Drehimpulskegel.
- (c) Erläutern Sie das Eigenwertproblem des Bahndrehimpulses.
- (d) Wiederholen Sie die Lösung der radialen Schrödingergleichung für ein Teilchen im Coulomb-Potential (insbes. Asymptotenbedingungen, Berechnung der Polynome). Demonstrieren Sie die Divergenz der unendlichen Reihe und erläutern Sie die Abbruchbedingung.

2. Aufgaben (30 Punkte): Drehimpulsoperator

- (a) Beweisen Sie folgende Eigenschaften der Drehimpuls-Leiteroperatoren $\hat{J}_{\pm} \equiv \hat{J}_1 \pm i\hat{J}_2$:
 - i.) $[\hat{J}_3, \hat{J}_{\pm}] = \pm\hat{J}_{\pm}$,
 - ii.) $\hat{J}_{\pm}\hat{J}_{\mp} = \hat{J}^2 - \hat{J}_3(\hat{J}_3 \mp 1)$,
 - iii.) $[\hat{J}^2, \hat{J}_{\pm}] = 0$,
 - iv.) man berechne $[\hat{J}_+, \hat{J}_-]$,
 - v.) man berechne $[\hat{J}_{\pm}, \hat{J}_3]$,
 - vi.) man drücke \hat{J}^2 durch \hat{J}_{\pm} aus.(s. Vorlesung, 12 Punkte).
- (b) *Bahndrehimpuls in Kugelkoordinaten:* Wiederholen Sie die Darstellung von Differentialoperatoren in Kugelkoordinaten. Mit der Definition $\hat{L}^2 = -\hbar^2\Delta_{\Theta,\phi}$ (Winkelanteil des Laplace-Operators), berechne man folgende Ausdrücke in Kugelkoordinaten:
 - i. \hat{L}_z und \hat{L}^2 ,
 - ii. \hat{L}_x und \hat{L}_y ,
 - iii. \hat{L}_{\pm} .(9 Punkte)
- (c) Ausgehend vom erzeugenden Funktional der Legendre-Funktionen finde man die explizite Form aller Drehimpuls-Eigenfunktionen Y_2^m (Kugelflächenfunktionen) für die d-Zustände an und stelle die zugehörige Aufenthaltswahrscheinlichkeit graphisch dar. Man berechne die Normierungskonstanten der Zustände Y_2^m (9 Punkte).