

# Quantenmechanik I, WS 2022/23

Prof. Dr. Michael Bonitz

Übungszettel 8 (Abgabe: Montag 11. Dezember. 10:00)

## 1. Wiederholung (mündlich): *Quantenmechanik im Hilbertraum*

- (a) Geben Sie die Spektraldarstellung eines Operators an. Leiten Sie daraus seine Matrixdarstellung in der Basis seiner Eigenfunktionen ab. Demonstrieren Sie den Übergang zu einer beliebigen anderen Darstellung.
- (b) Erläutern Sie die Eigenschaften einer kontinuierlichen Basis im Hilbertraum.
- (c) Wiederholen Sie die Eigenschaften der Diracschen Delta-Distribution und beweisen Sie diese. Wiederholen Sie die Darstellungen als Grenzwert stetiger Funktionen.
- (d) Erläutern Sie die allgemeine Heisenberg-Unschärfe-Relation.
- (e) Wiederholen Sie den Bahndrehimpuls der klassischen Mechanik, insbesondere die Darstellung in kartesischen Koordinaten.

## 2. Aufgaben (29 Punkte): *Harmonischer Oszillator. Drehimpulsoperator*

- (a) Ein Teilchen befindet sich im harmonischen Oszillator in einem Superpositionszustand aus Eigenzuständen  $|\Psi\rangle = Z^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} C_n |\psi_n\rangle$ , wobei  $C_n = e^{-\beta E_n/2}$ ,  $\beta > 0$  gilt. Geben Sie  $|\Psi\rangle$  explizit an. Man berechne als Funktion von  $x = \beta \hbar \omega$ 
  - i. die Normierungskonstante  $Z$ ,
  - ii. den Erwartungswert des Hamiltonoperators  $\hat{H}$
  - iii. den Erwartungswert des Teilchenzahloperators  $a^\dagger a$
  - iv. die Unschärfe (Standard-Abweichung) des Hamiltonoperators
  - v. die Unschärfe des Teilchenzahloperatorsim Zustand  $|\Psi\rangle$ .  
(12 Punkte).
- (b) Für den Drehimpuls-Operator der Quantenmechanik,  $\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}}$ , finde man den hermitesch adjungierten,  $\hat{\mathbf{L}}^\dagger$  (3 Punkte).
- (c) Man betrachte den Operator  $\hat{A} = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{d\phi}$  mit  $\phi \in [0, 2\pi]$ .
  - i. Man löse das Eigenwertproblem von  $\hat{A}$ . Die Eigenfunktionen sind zu normieren. Welche Eigenwerte sind möglich?
  - ii. Man gebe die Spektraldarstellung von  $\hat{A}$  an.
  - iii. Man gebe die Matrixelemente von  $\hat{A}$  und  $\hat{A}^3$  in der Basis der Eigenfunktionen an.

- iv. Man zeige, dass die Basis orthonormiert ist.
- v. Geben Sie die Vollständigkeitsbedingung für die Basis an.  
(6+2+2+3+1 Punkte)

3. **Zusatzaufgabe:** *Kohärente Zustände. Unschärfe*

- 1.) Man zeige, dass in einem beliebigen kohärenten Zustand des harmonischen Oszillators das Unschärfeprodukt von Orts- und Impulsoperator minimal ist.
- 2.) Man untersuche die Heisenberg-Unschärfe-Relation zweier Operatoren  $\hat{A}$  und  $\hat{B}$  für einen Zustand  $|\Psi\rangle$ , der Eigenzustand von  $\hat{A}$  aber nicht von  $\hat{B}$  ist.