Quantenmechanik I, WS 2023/24

Prof. Dr. Michael Bonitz

Übungszettel 7 (Abgabe: Montag 4.12. 10:00)

1. **Wiederholung (mündlich)**: *Chemienobelpreis 2023. Quantenmechanik im Hilbertraum*

   (a) Machen Sie sich mit den Mitteilungen des Nobelkomitees zum Chemie-Nobelpreis 2023 sowie mit der Publikation von Ekimov und Onushchenko, JETP Lett. **34** (6), 345 (1992) vertraut, s. downloads.

   i. Untersuchen Sie die Abhängigkeit der Wellenfunktion von der Dimensionalität für ein freies Teilchen in 3D, 2D, 1D und 0D ("quantum well", "quantum wire", "quantum dot"). Man betrachte jeweils Potentialtöpfe mit unendlich hohen Wänden und verwende einen Produktansatz (analog zu 2.c).

   ii. Diskutieren Sie die Aussage der Publikation, dass sich Abb. 3 durch das Vorliegen eines zweidimensionalen Kastenpotentials erklären lässt.

   (b) Erläutern Sie die Koordinatendarstellung von Operatoren.

   (c) Wie hängt die Matrixdarstellung eines Operators mit der des hermitesch adjungierten zusammen?

   (d) Formulieren Sie die Definition einer vollständigen Observable. Worin besteht die physikalische Interpretation?

   (e) Formulieren Sie die Eigenschaften einer Basis (vollständiges Orthonormalsystem) im Hilbertraum in der Dirac-Notation.

   (f) Wiederholen Sie die Eigenschaften hermitescher und unitärer Operatoren und beweisen Sie die Sätze 1-5 (Skript).

2. **Aufgaben (27 Punkte)**: *Harmonischer Oszillator*

   (a) Kohärente Zustände: Man zeige, dass die Zeitentwicklung des Erwartungswertes des Impulsoperators in einem kohärenten Zustand ψ_α mit der Zeitentwicklung des Impulses eines klassischen Teilchens im Oszillatorpotential übereinstimmt. (6 Punkte)

   (b) Man finde für den harmonischen Oszillator die hermitesch Adjungierten der Leiteroperatoren $\hat{a}, \hat{a}^+$, sowie des Teilchenzahloperators $\hat{N} = \hat{a}^+\hat{a}$ und des Hamiltonoperators (9 Punkte).

   (c) Lösen Sie das Eigenwertproblem des zweidimensionalen harmonischen Oszillators mit dem Potential $V(x, y) = m\omega^2(x^2 + y^2)/2$. Man zeige, dass ein Produktansatz $\Psi(x, y) = \psi(x)\psi(y)$, wobei ψ die Lösungen des 1D-Oszillators sind, die korrekte Lösung liefert. Untersuchen Sie die Entartung der Energie-Eigenwerte. (12 Punkte).

3. **Zusatzaufgabe:** *1D Harmonischer Oszillator im elektrischen Feld.*
   Ein Elektron im Harmonischen Oszillator befinde sich im ersten angeregten Zustand. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird langsam ein räumlich homogenes konstantes elektrisches Feld der Feldstärke $\mathcal{E}$ eingeschaltet. Man finde einen Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit P_{1n} dafür, dass sich das Elektron danach im n-ten angeregten Zustand (mit Feld) befindet. Man berechne explizit die Abhängigkeiten $P_{10}(\mathcal{E})$ und $P_{11}(\mathcal{E})$. Hinweis: es ist nur das stationäre Problem zu lösen. Man verwende die Dipol-Näherung für die potentielle Energie des Elektrons im Feld.