

Quantenmechanik I, WS 2023/24

Prof. Dr. Michael Bonitz

Übungszettel 6 (Abgabe: Montag 27.11. 10:00)

1. Wiederholung (mündlich): *Harmonischer Oszillator*.

- (a) Diskutieren Sie die Lösung der Schrödingergleichung für den eindimensionalen harmonischen Oszillator. Erläutern Sie Sommerfelds Polynommethode.
- (b) Wiederholen Sie Definition und Eigenschaften der Hermite'schen Polynome.
- (c) Erläutern Sie die Lösung der Schrödingergleichung des harmonischen Oszillators mit Hilfe der Leiteroperatoren.
- (d) Was sind kohärente Zustände (Glauberzustände)? Geben Sie Beispiele für ihre Realisierung an.

2. Aufgaben (35 Punkte): *Harmonischer Oszillator*

- (a) Berechnen Sie mit Hilfe der Rekurrenzformel die Eigenfunktionen $\psi_3(x)$, $\psi_4(x)$ und $\psi_5(x)$. Vergleichen Sie das Ergebnis mit Hilfe der erzeugenden Funktion der Hermite-Polynome (Skript, Eigenschaft a.). (9 Punkte)
- (b) Beweisen Sie, dass für die Hermite-Polynome gilt

$$H'_n(u) = 2nH_{n-1}(u), \quad (1)$$

$$uH_n(u) = nH_{n-1}(u) + \frac{1}{2}H_{n+1}(u). \quad (2)$$

(4 Punkte)

- (c) Beweisen Sie, dass die Eigenfunktionen des Harmonischen Oszillators ψ_n und ψ_m mit $m \neq n$ orthogonal zu einander sind. (4 Punkte)
- (d) Man bestimme für ein Teilchen im Grundzustand die Aufenthaltswahrscheinlichkeit außerhalb des klassisch erlaubten Bereiches. Anschließend finde man diese Wahrscheinlichkeit für beliebige n und untersuche den Grenzwert $n \rightarrow \infty$. *Hinweis:* man finde zuerst die klassischen Umkehrpunkte für $E = E_n$ und anschließend die Aufenthaltswahrscheinlichkeit *zwischen* diesen Punkten (10 Punkte).
- (e) Finden Sie die dipolerlaubten Übergänge des Oszillators. Hinweis: es sind die (Übergangs-)Matrixelemente des Dipoloperators $\hat{d} = e\hat{x}$ [vgl. klassisches Dipolmoment, s. Elektrodynamik], zwischen zwei Eigenzuständen mit den Quantenzahlen n und m zu berechnen, die definiert sind als

$$d_{mn} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_m^*(x) \hat{d} \psi_n(x). \quad (3)$$

Als dipolerlaubt bezeichnet man Übergänge, für die $d_{mn} \neq 0$ ist. Welche Werte nimmt d_{mn} an? (Hinweis: man berechne zunächst die Matrixelemente der Operatoren \hat{a} und \hat{a}^\dagger), (8 Punkte).