Quantenmechanik I, WS 2023/24

Prof. Dr. Michael Bonitz

Übungszettel 5 (Abgabe: 20.11. 10:00)

1. **Wiederholung (mündlich)**: *Schrödingergleichung für Teilchen in 1d-Potentialen*
   (a) Diskutieren Sie den Zusammenhang zwischen Symmetrie des Hamilton-Operators und Symmetrie der Wellenfunktion.
   (b) Formulieren Sie Kriterien, unter welchen Bedingungen die erste und zweite Orts-Ableitung der Wellenfunktion stetig sind.
   (c) Definieren Sie den Transmissions- und Reflexionskoeffizienten, T, R und erläutern Sie deren physikalischen Inhalt. Warum ist die Lösung für Energien $E > V(x)$ mit $V(-x) = V(x)$ nicht spiegelsymmetrisch, d.h. $\psi(-x) \neq \psi(x)$?
   (d) Wie lassen sich aus der Lösung der Schrödingergleichung für ein geladenes Mikroteilchen die Ladungsdichte und Stromdichte (vgl. Elektrodynamik) berechnen? Geben Sie eine elektrodynamische Interpretation für den reflektierten und transmittierten Anteil der Wellenfunktion, für T und R sowie die Relation $R + T = 1$.
   (e) Diskutieren Sie die Lösung der Schrödingergleichung für den eindimensionalen harmonischen Oszillator. Erläutern Sie Sommerfelds Polynommethode.

2. **Aufgaben (25 Punkte)**: *Schrödingergleichung für stückweise stetiges Potential*
   (a) Berechnen Sie für einen Potentialtopf endlicher Tiefe, $V(x) = -V_0 < 0$ für $x \in [-a, a]$ und $V(x) = 0$ sonst, den Transmissionskoeffizienten. Man betrachte dafür die stationäre Schrödingergleichung für Energien $E > 0$. Hinweis: Es sind die Gleichungen für die Teilbereiche sowie alle Randbedingungen zu formulieren. Die Bestimmungsgleichungen für die Koeffizienten sind aufzustellen (eine Lösung ist nicht erforderlich). Skizzieren Sie die Wellenfunktionen in den Teilbereichen. (8 Punkte).
   (b) Man löse für eine Potentialstufe endlicher Höhe, $V(x) = V_0 > 0$, für $x \in [-a, a]$ und $V(x) = 0$ sonst, die stationäre Schrödingergleichung. Man finde die Lösung für die Fälle 1) $0 \leq E \leq V_0$ und 2) $E > V_0$. *Hinweis*: die Lösung ist auf das Problem des Potentialtopfes endlicher Tiefe zurückzuführen (dessen Lösung kann als bekannt vorausgesetzt werden). (8 Punkte).
   (c) Ein Teilchen befinde sich in einem Potential der Form $V(x) = V(x+n\cdot L)$, $n = \pm1, \pm2, \ldots$. Welche Eigenschaften folgen daraus für die Wellenfunktion? (3 Punkte)
   (d) Man formuliere den Ansatz für die Wellenfunktion und alle Bedingungen für die Koeffizienten für folgendes System (ohne explizite Rechnung)

i.

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & , -a \le x \le -b \\ 0 & , -b \le x \le -c \\ V_0 & , -c \le x \le 0 \\ 0 & , 0 \le x \le b-c \\ -V_0 & , b-c \le x \le a-c \\ 0 & , x < -a; x > a-c \end{cases} \tag{1}$$

$a > b > c$ sind positiv.
(6 Punkte)

3. **Zusatzaufgabe (zum 28.11.):** Berechnen Sie das Energiespektrum (die Bandstruktur) eines Teilchens im Kasten-Potential $U(x) = U_0$, für $a \le x \le a+b$, bzw. $U = 0$ für $0 \le x \le a$, wobei das Potential periodisch forgesetzt wird (durch Verschiebung um $n \cdot (a+b)$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$). Man untersuche den Grenzfall $\{U_0 \to \infty;\ b \to 0, b \cdot U_0 = \text{const}\}$ und stelle das Resultat graphisch dar.