Quantenmechanik I, WS 2023/24

Prof. Dr. Michael Bonitz

<u>Übungszettel 11</u> (Abgabe: Montag 15.1. 10:00)

1. **Wiederholung (mündlich)**: *Spin. Pauligleichung*

   (a) Diskutieren Sie den Stern-Gerlach-Versuch und die Notwendigkeit der Einführung des Spins. Welche Grundannahmen werden dabei gemacht?

   (b) Wiederholen Sie das Eigenwertproblem des Spins und die Spinordarstellung der Spin-Zustände und des Spinoperators.

   (c) Erläutern Sie die Ankopplung des elektromagnetischen Feldes an geladene Teilchen in der Quantenmechanik. Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, und welche Freiheiten gibt es (Eichproblem)? Wie ändert sich die Wellenfunktion bei einer Eichtransformation?

   (d) Diskutieren Sie die quantenmechanische Beschreibung des Wasserstoffatoms im schwachen homogenen Magnetfeld (einfacher Zeeman-Effekt). Erläutern Sie das modifizierte Energiespektrum und die Wellenfunktionen.

2. **Aufgaben (29 Punkte)**: *Spin. Pauli-Gleichung*

   (a) Die Paul-Spinmatrizen (für Fermionen it Spin 1/2) sind definiert durch

   $$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

   Beweisen Sie folgende Eigenschaften:

   i. $\sigma_1, \ldots \sigma_3$ bilden eine Li-Algebra. Dazu zeige man, dass sie die selben Kommutationsregeln erfüllen wie Bahndrehimpuls-Komponenten (abgesehen von unwesentlichen konstanten Faktoren).

   ii. $\sigma_i^2 = \mathbf{1},\ \forall i$

   iii. $\sigma_i^\dagger = \sigma_i,\ \forall i$

   iv. $\det \sigma_i = -1,\ \forall i$

   v. $\mathrm{Tr}\ \sigma_i = 0,\ \forall i$

   vi. $\sigma_\alpha \sigma_\beta = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\sigma_\gamma,\ (\alpha, \beta, \gamma) \in (1, 2, 3)\,, \quad \alpha \neq \beta$

   vii. $\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2\delta_{ij}\mathbf{1}$

   (10 Punkte)

   (b) Man beweise $\left(\hat{\vec{\sigma}} \cdot \vec{a}\right)\left(\hat{\vec{\sigma}} \cdot \vec{b}\right) = \vec{a}\vec{b}\hat{I} + i\hat{\vec{\sigma}}[\vec{a} \times \vec{b}]$, wobei $\hat{\vec{\sigma}}$ der Vektor der drei Pauli-Spin-Matrizen ist, sowie $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zwei beliebige Vektoren aus R_3 sind. (4 Punkte)

(c) Beweisen Sie, dass $e^{i\phi\hat{\sigma}_k}, k = x, y, z$ die Wirkung eines Drehoperators (um welche Achse?) hat. (Hinweis: man entwickle Real- und Imaginärteil in eine Taylor-Reihe. (5 Punkte)

(d) Man berechne für ein Teilchen im Zustand $|+\rangle$ die Erwartungswerte von $\hat{s}_x$ und $\hat{s}_y^2$. (4 Punkte)

(e) Zeigen Sie, dass die Lösungen der Pauligleichung die *Kontinuitätsgleichung* erfüllen und leiten Sie die verallgemeinerten Ausdrücke für Wahrscheinlichkeitsdichte und -stromdichte ab (vgl. Vorlesung, 6 Punkte).

(f) **Zusatzaufgabe:** Man löse das Eigenwertproblem des Operators $\hat{\sigma}_n$ – die Projektion von $\hat{\vec{\sigma}}$ auf eine beliebige Raumrichtung, gegeben durch den Einheitsvektor $\vec{n}$.