

Quantenmechanik I, WS 2023/24

Prof. Dr. Michael Bonitz

Übungszettel 10 (Abgabe: Montag 8. Januar 10:00)

1. Wiederholung (mündlich): Radiale Schrödingergleichung. Wasserstoffatom

- (a) Diskutieren Sie die Eigenwerte (Quantenzahlen, Entartung usw.) und Eigenzustände des H-Atoms. Erläutern Sie die vollständigen Observablen beim H-Atom. Welche Information kann durch eine Zustands-Messung gewonnen werden und welche ist nicht verfügbar?
- (b) Wiederholen Sie die radiale Wahrscheinlichkeitsdichte im H-Atom und ihre Normierung.
- (c) Wiederholen Sie das Virialtheorem und wenden Sie es auf das H-Atom an.
- (d) Erläutern Sie den Einfluss der Kernbewegung auf die Energieeigenwerte und die Eigenfunktionen wasserstoff-ähnlicher Atome (s. Skript).
- (e) Erläutern Sie den Einfluss des Massenverhältnisses auf die Energieeigenwerte und die Eigenfunktionen und diskutieren Sie Bindungszustände in Halbleitern (Exzitonen), sowie Positronium and Antiwasserstoff.
- (f) Machen Sie sich mit den Auswahlregeln des Wasserstoffatoms bei Wechselwirkung mit elektromagnetischer Strahlung (Dipolstrahlung) vertraut (s. Skript, Abschnitt 5.6).

2. Aufgaben (46 Punkte): Wasserstoffatom

- (a) Berechnen Sie die Radialfunktionen des H-Atoms für $n = 1, 2, 3$ durch Bestimmung der Koeffizienten der Polynome (mit Hilfe der Rekurrenzformel). Normieren Sie die Wellenfunktionen¹. Stellen Sie die zugehörigen Wahrscheinlichkeitsdichten graphisch dar.
(10 Punkte)
- (b) Man berechne die Orts-Impulsunschärfe im Grundzustand.
(12 Punkte)
- (c) Man bestimme für ein Elektron im 1s- und im 2s-Zustand eines Z -fach geladenen Kerns
 - i. die mittlere kinetische Energie,
 - ii. die mittlere potentielle Energie.

¹Man verwende folgendes Integral

$$\int_0^{\infty} dx x^k e^{-\beta x} = \frac{k!}{\beta^{k+1}}, \quad k \in N, \beta \in R. \quad (1)$$

- iii. Man vergleiche das Ergebnis mit dem Erwartungswert des Hamiltonoperators sowie mit der Aussage des Virialtheorems.
- iv. Man untersuche die Abhängigkeit der mittleren kinetischen Energie von Z und die Relevanz relativistischer Effekte.

(10 Punkte)

(d) Bei der Photoelektronen-Spektroskopie wird ein Atom durch einen Laser ionisiert und das Energiespektrum der erzeugten freien Elektronen detektiert. Wegen des einfachen Zusammenhanges $E(p) = p^2/2m$ kann man daraus direkt die Impulsverteilung (Wahrscheinlichkeitsdichte im Impulsraum) der Elektronen in verschiedenen Zuständen rekonstruieren. Man berechne für ein Elektron im Wasserstoffatom

- i. für den Grundzustand die Wahrscheinlichkeitsdichte der Radialkomponente des Impulses, $\tilde{\rho}(p_r)$ und finde den wahrscheinlichsten Wert von p_r . Wie ist $\tilde{\rho}(p_r)$ normiert? *Hinweis:* man berechne zuerst aus der Grundzustandsfunktion $\Psi_{1s}(\vec{r})$ die zugehörige Wellenfunktion $\tilde{\Psi}_{1s}(\vec{p})$.
- ii. Man berechne analog die Impulsverteilung im 2s-Zustand.
- iii. Für den Grundzustand finde man die Wahrscheinlichkeitsdichte der kinetischen Energie.

(14 Punkte).