Quantenmechanik I, WS 2019/20

Prof. Dr. Michael Bonitz

Abschlussklausur[1], 14. Februar 2020

I. **Theorie (22 Punkte)**

1. Man formuliere die stationäre Störungstheorie für ein Teilchen mit Spin s und Lande-Faktor g_s^0 im elektromagnetischen Feld. Für das Feld $\{\mathbf{E}_0(\mathbf{r}), \mathbf{B}_0(\mathbf{r})\}$, das auf einen Hamilton-Operator $\hat{H}_0$ führt, sei die stationäre Lösung der Pauli-Gleichung bekannt. Man betrachte eine Störung des Systems, die zu einer schwachen Änderung des Lande-Faktors, $g_s^0 \to g_s^0 + \Delta g_s(\mathbf{r})$, [wobei $|\Delta g_s(\mathbf{r})| \ll |g_s^0|$ gelten soll], führt (etwa durch Modifikation der Umgebungsparameter) und berechne die erste Korrektur der Energie-Eigenwerte.

   i. Formulieren Sie die stationäre Pauli-Gleichung in der Orts-Spin-(Spinor)-Darstellung (Orts- und Spinanteile separieren) und erläutern Sie die darin vorkommenden Terme. Verwenden Sie die minimale Kopplung der Elektrodynamik und geben Sie den Zusammenhang zwischen Feldern und Potentialen an, s. Formeln. (*7 Punkte*)

   ii. Diskutieren Sie die allgemeine Struktur der stationären Zustände (Normierung, Interpretation) und zugehörigen Energie-Eigenwerte. (*4 Punkte*)

   iii. Geben Sie den Störoperator $\hat{H}^{(1)}$ an und formulieren Sie den Störungsansatz für die Pauligleichung bis zur ersten Ordnung. Zeigen Sie, dass die erste Energiekorrektur gegeben ist durch $E_n^{(1)} = \langle n|\hat{H}^{(1)}|n\rangle$, wobei n alle Quantenzahlen und $|n\rangle$ die in ii) diskutierten Zustände sind. (*7 Punkte*)

   iv. Vereinfachen Sie $E_n^{(1)}$ so weit wie möglich, insbesondere durch Auswertung der Spinbeiträge. Hinweis: man verwende $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = (0, 0, B(\mathbf{r}))$. (*4 Punkte*)

II. **Aufgaben (31 Punkte)**

2. Man löse das Bindungsproblem einer positiven mit einer negativen Ladung mit der Ladung und Masse (e_+, m_+) bzw. (e_-, m_-) unter Berücksichtigung der Schwerpunktsbewegung.

   i. Formulieren Sie die stationäre Schrödingergleichung, geben Sie den Hamiltonoperator and und erläutern Sie die Eigenschaften der Wellenfunktion (Bedeutung, Normierung). (*4 Punkte*)

   ii. Zeigen Sie, dass der Hamiltonoperator $\hat{H}(r_+, r_-)$ die Summe aus einem Schwerpunktsbeitrag, $\hat{H}_R$, und eines Relativanteils, $\hat{H}_r$, ist (s. Formeln). Geben Sie die Relativ- und Schwerpunktskoordinaten an. Leiten Sie $\hat{H}_r$ und $\hat{H}_R$ ab. Zeigen Sie dabei, dass $\nabla_{r_+} = \frac{m_+}{M}\nabla_R + \nabla_r$ und $\nabla_{r_-} = \frac{m_-}{M}\nabla_R - \nabla_r$ gilt. (*6 Punkte*)

[1]Noten: 1 ab 50.5, 2: 40, 3: 29.5, 4: 19

iii. Zeigen Sie, dass $\hat{H}_r$ und $\hat{H}_R$ kommutieren und benutzen Sie diese Information zum Finden der stationären Wellenfunktion. (*5 Punkte*)

iv. Geben Sie die Grundzustands-Wellenfunktion, die Gesamtenergie, die Bindungsenergie, E_1, und den effektiven Bohr-Radius, a_0 an (s. Formeln) und diskutieren Sie die Abhängigkeit von der Ladung und Masse beider Teilchen. Geben Sie alle möglichen Energie-Eigenwerte an. (*4 Punkte*)

v. Für folgende drei Fälle – Positronium, ein α-Teilchen und ein Elektron, sowie den Bindungszustand eines Protons und eines Antiprotons – gebe man E_1 und a_0 im Verhältnis zum jeweiligen Resultat für das Wasserstoff-Atom an. (*6 Punkte*)

(*25 Punkte*)

3. Man beweise, dass zwei kommutierende hermitesche Operatoren gemeinsame Eigenzustände besitzen. Die Eigenwerte seien nicht entartet. (*6 Punkte*).

III. **Formeln**

1. $1eV \approx 1.6 \cdot 10^{-19} Ws, \quad \hbar \approx 10^{-34} Nms.$

2. Eigenschaften des harmonischen Oszillators:
   Ausdehnung der Grundzustands-Wellenfunktion: $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$,
   Matrixelemente des Ortsoperators:
   $\frac{\sqrt{2}}{x_0} x_{n,m} = \{\sqrt{n+1},\ m = n+1; \quad \sqrt{n},\ m = n-1; \quad 0,\ m \neq n \pm 1\}$
   Leiteroperatoren: $\sqrt{2}\,\hat{a} \equiv u + \frac{d}{du}, \quad \sqrt{2}\,\hat{a}^\dagger \equiv u - \frac{d}{du}$

3. Wasserstoffähnlicher Bindungszustand (Atom, Ion, Exziton etc.) eines Elektrons (m_e) mit einem Z-fach positiv geladenen Kern der Masse m_p im Coulombpotential $V(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r}$; Quantenzahlen: $n = n_r + l + 1$;
   Relativ- und Schwerpunktskoordinaten: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_e - \mathbf{r}_p, \quad \mathbf{R} = (m_e\mathbf{r}_e + m_p\mathbf{r}_p)/M$
   Schwerpunkts-Hamiltonian: $\hat{H}_R = -\frac{\hbar^2\Delta_R}{2M}, \quad M = m_e + m_p$;
   Relativ-Hamiltonoperator: $H_r = -\frac{\hbar^2\Delta_r}{2m_r} + V(r), \quad \frac{1}{m_r} = \frac{1}{m_e} + \frac{1}{m_p}$;
   1s–Wellenfunktion: $\psi_{1,0,0}(\vec{r}) = \left(\frac{1}{\pi a_0^3}\right)^{1/2} e^{-\rho}; \quad \rho = \frac{r}{a_0}$
   2s–Wellenfunktion: $\psi_{2,0,0}(\vec{r}) = \left(\frac{1}{8\pi a_0^3}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{\rho}{2}\right) e^{-\rho/2}$,
   Hilfsintegral: $\int_0^\infty dx\, x^k e^{-\beta x} = \frac{k!}{\beta^{k+1}}$,
   Energieeigenwerte: $E_n = -\frac{1}{n^2} E_R, \quad E_R = \frac{m_r Z^2 e^4}{2\hbar^2 (4\pi\epsilon_0\epsilon_r)^2} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r 2a_0}$,

4. Pauli-Matrizen : $\quad \hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

5. Energie eines Teilchens mit Spin s im Magnetfeld (Dipolnäherung):
   $\Delta\hat{H}_s = -g_s \frac{e}{2m} \hat{s} \cdot \vec{B}$ mit $\hat{s} = (\hat{s}_x, \hat{s}_y, \hat{s}_z)$.

6. Minimale Kopplung der klassischen Elektrodynamik: das EM Feld wird durch die Potentiale eingeführt, wodurch sich Impuls und Energie ändern gemäß $\mathbf{p} \to \mathbf{p} - e\mathbf{A}$ und $H \to H + e\phi$.